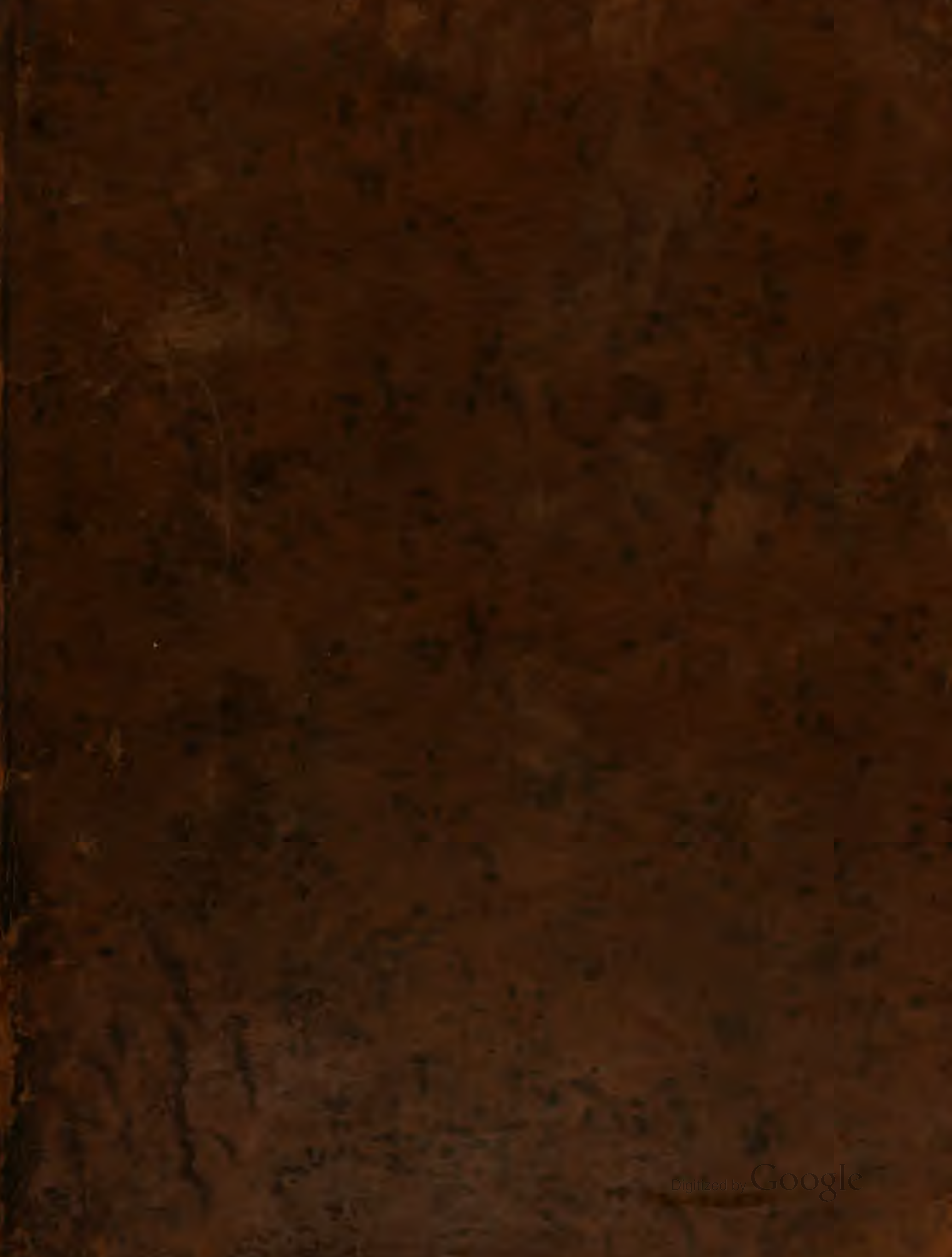



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
Digitized by Google



H° 6/ 2 vols

7/6

BB 2 Bds del

2/

NICOLAS SAUNDERSON

Professeur en Mathematiques.
dans l'Université de Cambridge
mort le 19 Avril 1739 âgé de 56 ans

I. Vanderbanck pinx. *C.F. Fritzsch Sculp.*

ELEMENS D'ALGEBRE

DE

MR SAUNDERSON,

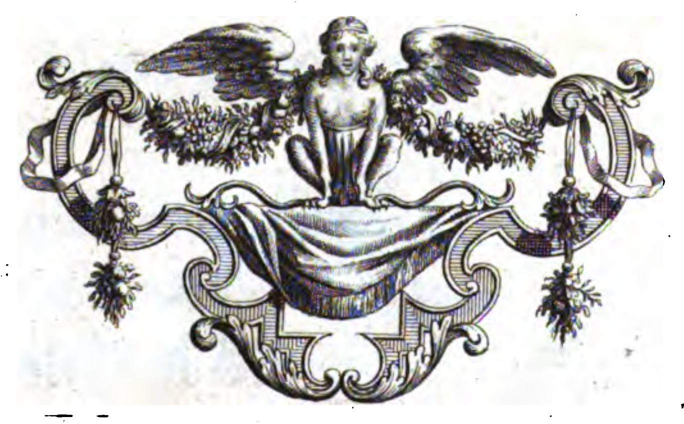
DOCTEUR EN DROIT ET PROFESSEUR EN MATHEMATIQUES DANS L'UNIVERSITE DE CAMBRIDGE;

TRADUITS DE L'ANGLOIS ET AUGMENTÉS DE QUELQUES REMARQUES

PAR M^R DE JONCOURT,

DOCTEUR ET PROFESSEUR EN PHILOSOPHIE.

TOME PREMIER.



A AMSTERDAM ET A LEIPZIG,
Chez ARKSTE'E ET MERKUS,
MDCCLVI.

Saunderson, Nicholas.

A MONSIEUR LE COMTE DE BENTINCK,

SEIGNEUR DE RHOON,

&c. &c. &c.

MONSIEUR,

LE mérite de cet Ouvrage, dont le caractére diſtinctif eſt la clarté, & que ſon titre modeſte d'*Elémens d'Algébre* n'empêche pas d'être profond, m'a déterminé à vous l'offrir.

J'espére, Monsieur, que cette liberté ne vous déplaîra point, & que le goût que je vous connois pour les Sciences, & en particulier pour celle-ci, me servira d'excuse. J'ai l'honneur d'être avec le plus profond respect

MONSIEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur

E. DE JONCOURT.

AVER-

AVERTISSEMENT.

Le ſavant Auteur de ce Traité, ayant, dans ſon Projet de ſouſcription, donné en peu de mots une idée générale de ſon Ouvrage, on a cru devoir réimprimer ici cette eſpéce d'Abrégé, pour exciter ou ſatisfaire la curioſité du Lecteur.

CEt Ouvrage (*dit l'Auteur*) eſt principalement deſtiné à l'inſtruction des Jeunes-gens qui ſouhaitent d'étudier l'Algébre, & à l'uſage de ceux qui voudroient la leur enſeigner. Il eſt partagé en dix Livres précédés d'une Introduction, dont les Fractions vulgaires & décimales forment le ſujet : la connoiſſance des premiéres étant abſolument néceſſaire à un Algébriſte. Dans cette Introduction, les raiſons de toutes les opérations différentes ſur les Fractions ſont ſi clairement expliquées, que l'apprentif Analyſte peut en tirer des règles applicables à tous les cas poſſibles, où quelque fraction ſe trouve ſeule, ou mêlée avec d'autres quantités. Le premier Livre traite de la nature de l'Algébre & des Quantités Algébraïques ; de leur addition, ſouſtraction, multiplication & diviſion ; de la proportion, des fractions, & de l'extraction des racines en Algébre ; enfin, de la maniére de réſoudre des équations ſimples : & cette maniére y eſt éclaircie par un grand nombre d'exemples. Ce Livre, ſous le chef de la Multiplication, fait voir, comment par la ſeule multiplication il y a moyen d'inventer pluſieurs utiles Théorêmes, tant en Arithmétique qu'en Géométrie. Dans les articles qui concernent la diviſion & l'extraction des Racines, il eſt parlé de l'origine & de la continuation des Suites infinies.

Mais on a eu ſoin de mettre ce qu'on en dit à la por-

tée des esprits les plus bornés, toutes les autres considérations rélatives à ce sujet étant réservées pour d'autres parties de ce Traité, où les commençans auront moins de peine à les comprendre.

Le second Livre contient quantité de questions formant des équations simples, & dont on peut résoudre les unes par une seule supposition, & les autres par un plus grand nombre. Les meilleures méthodes d'exterminer des quantités inconnues sont expliquées dans ce Livre.

Le troisiéme Livre traite des Equations du second degré, & de la maniére de les résoudre : le tout accompagné d'exemples, entremêlés d'observations curieuses concernant les racines possibles & impossibles des équations.

Le quatriéme Livre traite de l'Algébre pure, c'est-à-dire, où les lettres de l'Alphabet sont employées, non seulement pour représenter des quantités inconnues, mais aussi celles qui sont connues. On raméne ici plusieurs des problêmes précédens, proposés indéfiniment, & l'on en donne des solutions générales au moyen de divers Théorêmes généraux, prouvés d'abord analytiquement, & puis par la méthode synthétique, pour que l'apprentif Algébriste puisse se bien mettre au fait de l'une & de l'autre sorte de ces démonstrations.

Le cinquiéme Livre donne les solutions de divers Problêmes curieux, appartenant à la classe de ceux dont quelques-uns sont susceptibles de plus d'une réponse, & d'autres d'un nombre infini de réponses, le tout par une méthode générale très-facile à comprendre, & nouvelle (suivant l'Auteur.) On démontre ici plusieurs problêmes élégans & utiles, qui ont rapport tant aux nombres entiers qu'aux fractions; particuliérement celui de Mr. *Cotes*, pour trou-

trouver les plus petits nombres qui expriment une raison donnée avec le degré d'exactitude requis. A cette occasion la partie la plus intéressante de la doctrine des Incommensurables, telle qu'*Euclide* l'a donnée, est offerte aux yeux du Lecteur, qui y trouvera des raisonnemens plus subtils qu'il n'en pourra peut-être rencontrer dans aucune autre partie des Mathématiques, & cependant à la portée des esprits les plus bornés.

Le sixiéme Livre est une collection choisie de plusieurs Problêmes connus sous le nom de *Problêmes de Diophante*; les solutions qu'on en donne ici sont aisées & claires, & quelques-unes d'elles méritent peut-être la préférence sur celles des mêmes problêmes dans *Diophante*, ou dans quelqu'un de ses Commentateurs ou Imitateurs: car les Porismes de *Diophante* étant absolument perdus, cet habile Ecrivain est, en plus d'un cas, livré à la merci de ses Commentateurs.

Le septiéme Livre traite de la doctrine de la Proportion telle qu'elle est enseignée dans le cinquiéme Livre d'*Euclide*. On y fait voir que l'idée ordinaire de la proportionalité peut, sans l'altérer, être étendue aux incommensurables; & après avoir assigné ainsi une marque caractéristique & sûre de la proportionalité, la cinquiéme définition & la septiéme du cinquiéme Livre des Elémens, n'en sont plus que des conséquences aisées, naturelles, & parfaitement adaptées au but qu'*Euclide* se proposoit dans son Systême de Géométrie. Toutes les propositions du cinquiéme Livre des Elémens sont démontrées ensuite clairement & succinctement dans leur ordre, & d'une maniére qui s'éloigne aussi peu qu'il est possible de celle d'*Euclide*, afin de ne rien perdre de la force & de l'élégance de ses démonstrations;

& avec cela le tout est rendu si aisé à comprendre, qu'il y a lieu de se flatter que ceux qui ont été arrêtés par ce Livre, en voulant parcourir jusqu'au bout les six premiers Livres des Elémens, ne trouveront plus d'obstacle en leur chemin. La derniére partie de ce Livre donne une idée claire & distincte de la composition & de la résolution des Raisons, & de leur usage dans la Physique & dans la Méchanique: desorte que cette partie de la doctrine de la proportion ne sauroit plus être un mystére pour tout homme qui la lira avec le moindre degré d'attention.

Dans le huitiéme Livre on applique l'Algébre à la Géométrie; & par le moyen de quelques problêmes simples & faciles, on initie l'apprentif Analyste aux plus sublimes mystéres de cette Science. Ici la composition des Problêmes Géométriques est déduite premiérement de l'Analyse, après quoi les démonstrations synthétiques sont formées à l'aide des constructions qui y sont données, sans aucun égard à l'Analyse. La seconde partie de ce Livre contient la doctrine des Solides, pour autant qu'elle est rélative aux prismes, aux cylindres, aux pyramides, aux cones, aux sphéres, aux sphéroïdes, &c.; dont les principales propriétés sont tirées d'*Euclide*, d'*Archiméde*, & autres, & démontrées de la maniére la plus simple, sans que l'imagination soit obligée au moindre effort.

Le neuviéme Livre roule sur divers sujets. Il y est parlé premiérement, des Puissances & de leurs Exposans; 2. de la méthode de *Newton* de décomposer un binôme, considérée dans toute son étendue; 3. des Logarithmes, de leur nature, & en particulier des logarithmes de *Briggs*; 4. de la Logarithmotechnie, ou de la méthode de calculer les logarithmes, fondée sur les plus simples de leurs propriétés;

5. de

5. de l'invention des Diviseurs, telle qu'elle est enseignée dans l'Arithmétique Universelle de *Newton*; & 6. du calcul des Quantités sourdes.

Le Livre dixiéme & dernier traite premiérement des Equations en général, & ensuite des Equations cubiques & de celles du quatriéme degré en particulier; indique les meilleures méthodes de les résoudre quand elles sont susceptibles d'une solution exacte, & des règles d'approximation quand elles ne le sont pas. La méthode de *Newton* est décrite & expliquée ici d'une maniére détaillée.

Il paroît clairement par ce qu'on vient de dire, que le but de notre Auteur dans ce Traité n'étoit pas seulement de donner un Cours d'Algébre, mais aussi d'exciter ses Lecteurs à l'étude de la Géométrie, en écartant ou résolvant toutes ces difficultés, qu'une longue expérience lui avoit appris être les principaux obstacles qui arrêtent les Jeunes-gens dans la carriére des Elémens.



SE-

SECOND AVERTISSEMENT.

PArmi les Questions que le Professeur SAUNDERSON propose rélativement à la Règle de Trois, *il y en a quelques-unes qui appartiennent à la Double Règle de Trois, dans laquelle cinq nombres sont donnés pour en trouver un sixiéme, comme dans la trente-deuxiéme question, pag.* 13. Si deux hommes gagnent en trois jours quatre schellings, combien gagneront cinq hommes en six jours? *Où les nombres donnés sont* 2, 3, 4, 5, 6; *dont les trois premiers forment toujours la partie conditionelle de la question, & les trois autres la partie absolue, qu'on souhaite de connoître. Il est à noter aussi, que dans toutes les questions appartenant à la Double Règle de Trois, les nombres doivent être rangés de façon, que le premier & le quatriéme, le second & le cinquiéme, le troisiéme & le nombre cherché, soient de même dénomination respectivement; comme dans la question proposée*: 2 hommes, 3 jours, 4 schellings; 5 hommes, 6 jours, schellings requis.

Cet éclaircissement étant donné, voici la premiére règle du Professeur, pag. 14. Dans toutes les questions de cette nature, si les trois derniers nombres sont multipliés l'un par l'autre, & que le produit soit divisé par le produit des deux premiers nombres, le quotient sera le nombre cherché. *Comme dans la question proposée* $\frac{4 \times 5 \times 6}{2 \times 3} = 20$, *nombre cherché. De-même, dans la trente-troisiéme question.* Si pour charrier un poids de 300 livres, à la distance de 40 milles, je dois payer 7 schellings & 6 sous, combien dois-je payer pour charrier un poids de 500 livres à la distance de 60 milles? *Les termes sont un poids de* 300 livres, 40 milles, $7\frac{1}{2}$ schellings; 500 livres,

livres, 60 milles. *Rép.* $\frac{7\frac{1}{2}\times5\times60}{3\times40}=18\frac{3}{4}$, *c'est-à-dire*, 18 *schellings & 9 sous.*

Il y a un autre cas, qui appartient en partie à la Règle de Trois inverse, comme dans la trente-neuviéme question, pag. 16. Si 2 acres de pré peuvent nourrir 3 chevaux pendant 4 jours, combien de tems 5 acres nourriront-ils 6 chevaux? *Ici il est clair, que la Règle de Trois inverse a lieu; car la même quantité de pré nourrira 6 chevaux seulement la moitié du tems qu'elle en nourriroit* 3. *Ainsi pour résoudre des questions de cette nature, le Professeur donne une seconde règle, pag.* 18. Dans toutes les questions qui appartiennent à la Double Règle de Trois inverse, où les nombres sont supposés rangés comme dans la Double Règle de Trois directe, si les trois nombres du milieu sont multipliés l'un par l'autre, & le produit divisé par le produit des deux extrêmes, le quotient de cette division sera le nombre cherché. *Comme dans la trente-neuviéme question, l'ordre des termes étant* 2 acres, 3 chevaux, 4 jours; 5 acres, 6 chevaux; *donc* $\frac{3\times4\times5}{2\times6}=5$, *nombre des jours cherché.*

Mais il faut observer ici, que les termes de cette question peuvent être rangés dans un ordre différent, de la maniére suivante: Si trois chevaux mangent l'herbe de deux acres en quatre jours, combien de tems six chevaux mettront-ils à manger celle de cinq acres? *Ici l'ordre des termes donnés est,* 3 chevaux, 2 acres, 4 jours; 6 chevaux, 5 acres: *& suivant cet ordre, ni cette règle, ni la précédente ne résoudront point la question.*

Pour lever cette difficulté, & trouver en quel ordre la règle du Professeur demande que les nombres soient placés, nous proposerons un Théorême général, au moyen duquel on peut résoudre

toutes les questions qui appartiennent à la Double Règle de Trois. C'est ce que je ferai suivant la méthode de feu Mr. WARD *de* Chester, *dans son* Introduction aux Mathématiques, Part. 1. Chap. 7. Sect. 3. pag. *96, où il désigne les six quantités qui se trouvent dans les questions appartenant à la Double Règle de Trois, par ces six lettres,* P, T, G, p, t, g: *les lettres capitales* P, T, G *marquant les termes de la partie conditionelle de la question, comme les petites lettres* p, t, g *font les autres termes, de même dénomination que leurs lettres capitales respectives.* P *&* p *signifient les termes principaux ou causes du gain, de la perte, ou de la dépense dont il s'agit dans la question;* T, t *les tems (comme dans les questions 32 & 39) ou les espaces (comme dans la question 33) requis pour produire ce gain, cette perte, ou cette dépense; &* G, g *le gain, la perte, ou la dépense même, naissant des termes principaux dans les dits tems ou espaces.*

Pour former donc un Théorême propre à résoudre les questions qui appartiennent à la Double Règle de Trois directe, prenons quelque question particuliére, comme, par exemple, la trente-deuxiéme: Si 2 hommes en 3 jours gagnent 4 schellings, combien 5 hommes gagneront-ils en 6 jours? *où* 2 = P, 3 = T, 4 = G, 5 = p, 6 = t, *&* g *est le nombre cherché. Cette question peut se résoudre en deux analogies, ainsi:* Si 2 (*P*) hommes gagnent 4 (*G*) schellings dans un tems donné, 5 (*p*) hommes gagneront 10 ($\frac{Gp}{P}$) schellings dans le même tems. *De-plus,* si en 3 (*T*) *jours* 10 ($\frac{Gp}{P}$) schellings sont gagnés, on gagnera en 6 (*t*) jours 20 ($\frac{Gpt}{PT}$) *partant* $\frac{Gpt}{PT} = g$; *& multipliant les deux membres par* PT, *nous avons le Théorême* $Gpt = gPT$. *Et puisque la trente-deuxiéme question nous donne cinq termes rangés dans cet ordre,* P, T, G, p, t,

le

le terme cherché étant $g=\frac{Gpt}{PT}$, *il est manifeste que le terme cherché se trouve, en divisant le produit des trois derniers termes donnés, par le produit des deux premiers, conformément à la premiére règle du Professeur.*

Prenons présentement la trente-neuviéme question, pour en déduire un Théorême propre à résoudre les questions de même nature, qui appartiennent à la Double Règle de Trois inverse. Si 2 (*G*) acres de pré nourrissent 3 (*P*) chevaux 4 (*T*) jours, combien 5 (*g*) acres nourriront 6 (*p*) de chevaux? *Cette question doit être décomposée en deux règles de trois: premiérement en cette règle inverse.* Si une certaine étendue de pré nourrit 3 (*P*) chevaux 4 (*T*) jours, elle nourrira 6 (*p*) nombre double de chevaux seulement la moitié du tems, c'est-à-dire, 2 $(\frac{PT}{p})$ jours: *Secondement, en cette règle de proportion directe,* si 2 (*G*) acres nourrissent ce nombre double de chevaux 2 $(\frac{PT}{p})$ jours, 5 (*g*) acres les nourriront 5 $(\frac{gPT}{Gp})$ jours. *Donc* t, *le nombre cherché, est* $\frac{gPT}{Gp}$, *& multipliant ces deux quantités égales par* Gp, *nous avons le même Théorême que ci-dessus,* $Gpt=gPT$, *ce qui marque que c'est un Théorême général propre à résoudre toutes les questions qui appartiennent à la Double Règle de Trois, tant inverse que directe. Et puisque l'ordre des termes donnés dans la trente-neuviéme question est* G, P, T, g, p; *& que d'un autre côté* t, *le nombre cherché, est trouvé égal à* $\frac{gPT}{Gp}$, *il s'ensuit que, conformément à la seconde règle du Professeur, si le produit des trois termes du milieu est divisé par le produit des deux extrêmes, le quotient sera le terme cherché.*

Mais dans la pratique de cette seconde règle, il faut bien

avoir soin d'assigner la premiére place au terme G : *& puis, si* t *est le terme cherché, comme dans la trente-neuviéme question, l'ordre des termes donnés sera* G, P, T, g, p, *comme ci-dessus; mais si* p *est le terme cherché, l'ordre sera* G, T, P, g, t. *Et enfin, si* g *est le terme cherché, l'opération doit toujours se faire suivant la premiére règle du Professeur, dans laquelle l'ordre des termes est* P, T, G, p, t, *comme dans les questions* 32 *&* 33; *ou bien* T, P, G, t, p, *ce qui revient au même.*



MEMOIRES
CONCERNANT
L A V I E
ET LE
CARACTERE
DU
DOCTEUR SAUNDERSON,
Professeur en Mathématiques dans l'Université de CAMBRIDGE.

NICOLAS SAUNDERSON nâquit au mois de Janvier de l'an 1682, à *Thurlston* près de *Penniston* en *Yorkshire*. Son Pére, avec un bien assez médiocre, avoit une Charge, qu'il remplit sans reproche durant l'espace de plus de quarante ans. Son fils aîné dont il est ici question, perdit à l'âge de douze mois par la petite-vérole, non seulement l'usage de la vue, mais ses yeux mêmes. Un sens, dont il avoit si peu joui, fut bientôt oublié, & il ne conserva pas plus d'idée de la lumiére & des couleurs qu'un Aveugle-né.

Il fit ses Humanités à *Penniston* sous Mr. STANIFORTH, dont les instructions lui aidérent à faire de si grands progrès dans la connoissance de la Langue Latine & Grecque, qu'il se trouva dans la suite en état de comprendre les Ouvrages d'*Euclide*, d'*Archiméde* & de *Diophante*, quand on les lui lisoit en Grec. *Virgile* & *Horace* étoient ses Auteurs favoris parmi les Poëtes Romains; sa mémoire étoit ornée de leurs plus beaux passages, & il les citoit souvent en conversation fort à propos. Il faisoit grand cas des Ouvrages de *Cicéron*, & s'étoit rendu cet Auteur familier au point de parler Latin avec une facilité & une

une élégance peu communes. Il apprit dans la suite passablement bien la Langue Françoise.

Après qu'il eut donné quelques années à l'étude des Langues, son Pére, dont la Charge exigeoit quelque connoissance des propriétés des Nombres, commença à lui enseigner les règles ordinaires d'Arithmétique; ce fut à cette occasion que son génie se développa; bientôt il se trouva en état de faire toutes les opérations communes, de réussir dans de longs calculs par la seule force de sa mémoire, & de se former de nouvelles règles à lui-même, pour résoudre plus aisément ces sortes de problêmes, qu'on a accoutumé de proposer aux commençans, moins pour les instruire que pour les embarrasser; desorte que ses camarades d'école, quand quelque difficulté les arrêtoit, le consultoient préférablement à leur Maître.

A l'âge de dix-huit ans il fut présenté à Mr. RICHARD WEST, qui, joignant à une fortune aisée un goût distingué pour les Mathématiques, lui enseigna les Elémens de la Géométrie & de l'Algébre. Peu de tems après il fit connoissance avec le Dr. NETTLETON, & ce fut au plaisir que ces Messieurs eurent à l'instruire qu'il dût ses premiers progrès dans les Sciences Mathématiques. Ils lui fournirent des Livres, & eurent la bonté de les lui expliquer. Mais bientôt le disciple se trouva plus en état de donner des leçons à ses Maîtres, que dans la nécessité d'en recevoir d'eux.

Le désir d'apprendre crût avec notre Auteur, & détermina son Pére, qui souhaitoit d'encourager une disposition si louable, à l'envoyer à la petite Académie d'*Attercliff* près de *Sheffield*. La Logique & la Métaphysique étoient à peu près tout ce qu'on enseignoit dans cette Académie; & comme la premiére de ces Sciences ne se réduit assez souvent qu'à l'art de disputer en mode & en figure, & que l'autre ne roule que sur des idées abstraites, notre Auteur, que son génie portoit à tout ce qui est réel & utile, ne fit que très-peu de séjour en cet endroit.

Après qu'il eut quitté *Attercliff*, il continua durant quelque tems ses études à sa maniére, sans autre aide ou guide que lui-même: à-la-vérité il ne lui falloit autre chose qu'un bon Auteur, & quelqu'un qui fût capable de lui en faire la lecture, la force de son génie suffisant pour lui faire résoudre toutes les difficultés à mesure qu'elles s'offroient à son esprit. Jusqu'alors son Pére seul avoit fourni aux frais de son éducation; mais comme

me il avoit une nombreuse famille, ce fardeau devint trop pesant pour lui. Les Amis de notre Auteur songérent donc à lui procurer quelque occupation qui servît à l'entretenir. Son inclination le portoit fortement vers l'Université de *Cambridge*, où il comptoit d'avoir occasion plus qu'en aucun autre lieu de faire des progrès dans son étude favorite. Mais ce que son éducation avoit couté, & le tems qu'il faudroit y passer avant d'obtenir ses degrés, afin d'être en droit d'enseigner publiquement, lui parurent des obstacles insurmontables. A la fin cependant il résolut de faire une tentative, & de se rendre à *Cambridge*, non pour y apprendre quelque chose, mais pour y enseigner; car ses Amis considérant l'étendue de ses connoissances Mathématiques, & son heureuse facilité à communiquer ses idées aux autres, se flattoient qu'il pourroit enseigner les Mathématiques avec succès, même dans l'Université; ou si ce dessein venoit à manquer, ils espéroient que la même entreprise réussiroit à *Londres*.

Il fut donc mené à *Cambridge* l'année 1707, qui étoit la vingt & cinquiéme de son âge, par Mr. DUNN, qui le fit manger avec lui au Collége de *Christ*; les membres de ce Collége furent charmés du nouveau convive, lui donnérent une chambre, & ajoûtérent à la permission de se servir de leur Bibliothéque, tous les autres agrémens qu'il pouvoit raisonnablement souhaiter. Mais l'exécution de son projet rencontra quantité d'obstacles; il se trouvoit loin de ses parens, à l'étroit & bien jeune pour enseigner la Philosophie dans une Université où cette Science paroissoit alors dans tout son éclat. Le célébre WHISTON y remplissoit une Chaire de Professeur en Mathématiques, & y donnoit des leçons précisément telles que Mr. SAUNDRRSON les proposoit. Ce contraste, bien loin de faire de la peine à WHISTON, lui fournit l'occasion de donner une nouvelle preuve de la bonté de son caractère: il se rendit de bonne grace & d'abord aux sollicitations que les amis d'un homme aussi extraordinaire lui faisoient en sa faveur. Mr. DUNN n'avoit négligé aucun moyen de le faire connoître, & s'y étoit si bien pris, qu'au bout de quelques mois divers Savans témoignérent vouloir former des liaisons particuliéres avec lui. Ses leçons attirérent bientôt tant de monde, que le jour entier suffisoit à peine pour contenter tous ceux qui désiroient d'avoir part à ses instructions. Il y en eut même quelques-uns dont les études étoient

étoient tournées d'un tout autre côté, qui profitérent avec empressement de l'occasion d'acquérir à l'aide d'un si grand Maître quelques idées en Mathématiques & en Philosophie.

Le Chevalier NEWTON avoit quitté *Cambridge* plusieurs années avant que Mr. SAUNDERSON vînt s'y établir. Ses *Principes Mathématiques*, quoique déja publiés depuis du tems, n'étoient encore compris que de bien peu de gens. Entre plusieurs autres desseins qu'il se proposoit dans cet admirable Ouvrage, il vouloit détruire les tourbillons & quelques autres chiméres favorites de DES CARTES; & la chose lui réussit au point qu'il porta par-là un coup mortel à une Philosophie, qui jusqu'alors n'avoit été fondée que sur des principes erronés, & sur des hypothéses imaginées dans le cabinet, sans qu'on pût dire avec certitude qu'elles eussent quelque objet réel qui leur répondît dans la Nature. NEWTON, qui n'employoit jamais plus de mots qu'il ne falloit, avoit exprimé ses démonstrations de la maniére la plus concise, laissant le soin à ses Lecteurs de puiser ailleurs les connoissances dont ils pourroient avoir besoin. Son *Optique* & son *Arithmétique Universelle* sont toutes deux écrites dans ce même stile, & contiennent toutes deux de grandes & étonnantes découvertes. Mr. SAUNDERSON expliqua dans ses leçons ces différens Ouvrages, qui ouvrirent un vaste champ à son génie; & les disputes publiques marquérent suffisamment le succès de ses leçons. Car ces merveilleux phénoménes de la Nature, dont la solution avoit jusqu'alors paru si difficile aux premiers Mathématiciens, devinrent des théses que de Jeunes-gens défendoient pour obtenir le premier degré de Maître-ès-Arts. Chaque année quelques-uns de ceux qui avoient le plus profité de ses leçons soutenoient en public le systême de NEWTON au sujet de la Théorie du Flux & du Réflux, des phénoménes de l'Arc-en-ciel, & du mouvement des Corps qui composent le Systême Planétaire, entant qu'il est l'effet des loix de la Gravité.

On sera peut-être surpris que notre Auteur ait donné des leçons sur l'Optique, & ait expliqué la nature des Couleurs, la maniére dont se fait la vision, & en général tout ce qui a rapport à la réfraction & à la réflexion des rayons de lumiére: mais si l'on considére que la Science dont il s'agit s'explique entiérement par le moyen des lignes, & est soumise aux règles de la Géométrie, on concevra aisément qu'il a pu entendre à fond ces sortes de sujets. Com-

Comme Mr. SAUNDERSON enseignoit les principes de la Philosophie *Newtonienne* à la Jeunesse de l'Université, il fit bientôt connoissance avec l'immortel Auteur de cette Philosophie, & eut l'avantage de l'entretenir fréquemment sur les endroits les plus difficiles de ses Ouvrages. Le Dr. HALLEY, Mr. DE MOIVRE, & plusieurs autres fameux Mathématiciens de *Londres*, faisoient un cas extrême de son amitié, & avoient des idées si avantageuses de la force de sa raison & de son jugement, qu'ils le consultoient très-souvent sur leurs écrits & sur leurs desseins.

Mr. WHISTON ayant abdiqué sa charge de Professeur, le mérite Mathématique de Mr. SAUNDERSON se trouva si généralement reconnu, & si supérieur à celui de tout compétiteur qui auroit pu se mettre sur les rangs, que les Chefs des Colléges & quelques autres Personnes de distinction s'adressérent au Duc de SOMERSET, Chancelier de l'Université, & le sollicitérent de vouloir contribuer à faire obtenir à Mr. SAUNDERSON le grade de Maître-ès-Arts. Ce Seigneur y consentit, & agit si efficacement que la Reine fit expédier d'abord l'Acte nécessaire pour cela. Immédiatement après, c'est-à-dire, au mois de Novembre de l'an 1711, il fut élu Professeur en Mathématiques. Pour lui faire avoir l'un & l'autre de ces deux titres, le Chevalier NEWTON s'étoit puissamment intéressé en sa faveur.

Dans ce même tems Mr. COTES remplissoit à *Cambridge* une Chaire de Professeur en Astronomie & en Philosophie expérimentale. C'étoit un homme aimable, & ami intime de notre Auteur, avec lequel il avoit divers traits de conformité. Leur âge, leur génie, & leur inclination pour les Mathématiques étoient les mêmes, & quand il s'étoit agi de leur faire avoir le poste qu'ils occupoient, ils avoient été l'un & l'autre puissamment recommandés par le Chevalier NEWTON.

Jamais Université n'a pu se vanter de posséder à la fois deux hommes aussi capables d'étendre les progrès de la Philosophie, & d'augmenter le nombre de ses partisans. S'ils avoient atteint un âge plus avancé, en s'aidant mutuellement, & en s'animant l'un l'autre à acquérir de nouvelles connoissances, leurs travaux réunis auroient indubitablement beaucoup contribué à la gloire de notre Université, & à l'avancement des Sciences qui étoient de leur département. Mais Mr. COTES fut emporté par une

fiévre à la fleur de son âge, n'ayant eu que le tems nécessaire pour composer un petit nombre de piéces, qui ne sont que de simples échantillons de sa grande habileté, & cependant sans prix pour les Connoisseurs. Et pour ce qui est de la vie de notre Auteur, quoiqu'elle ait été plus longue, une si grande partie en a été employée à enseigner, qu'il ne nous reste que très-peu de monumens de son savoir & de son génie.

La première production de Mr. Saunderson après avoir été élu Professeur, fut sa Harangue inaugurale, qu'il fit dans la Langue Latine, & d'un stile véritablement *Cicéronien*; & ce qui acheva de charmer son auditoire, il prononça son discours avec une grace sans pareille.

Après y avoir marqué sa vive reconnoissance à la Reine, au Chancelier, & à tous ceux qui avoient contribué à son élection, de l'opinion favorable qu'ils avoient de ses connoissances Mathématiques, il ajoûta un admirable éloge de cette Science, qu'il considéra comme un parfait modéle de raisonnement, & comme étant d'un usage infini dans le cours ordinaire de la vie.

Depuis ce tems-là il consacra la plus grande partie de son loisir à l'instruction de ses disciples, desorte que ses Amis ne jouirent plus guéres des agrémens de sa conversation. Il continua à demeurer dans le Collége de *Christ* jusqu'à l'an 1723, ayant pris maison alors à *Cambridge*, apparemment dans l'intention de se marier: car il épousa peu près après une fille de Mr. Guillaume Dickons, Recteur de *Boxworth* dans le Comté de *Cambridge*. Sa femme lui donna un fils & une fille, qui sont encore en vie l'un & l'autre.

L'an 1728, quand le Roi George II. actuellement régnant, honora l'Université de *Cambridge* de sa présence, il témoigna souhaiter de voir un homme aussi distingué dans sa sorte. Notre Professeur, charmé d'obéir à cette espéce d'ordre, se rendit au Sénat pour y témoigner son profond respect à Sa Majesté, qui à cette occasion le créa Docteur en Droit.

Le Dr. Saunderson étoit naturellement d'une constitution saine & vigoureuse, mais son genre de vie sédentaire ruina enfin sa santé. Il s'étoit plaint depuis quelques années d'un engourdissement, qui au printems de l'an 1739 dégénéra en une mortification au pied. Le scorbut avoit corrompu son sang au point, que tout l'Art de la Médecine ne fut pas capable d'arrêter les pro-

progrès de ce mal. Il mourut le 19 d'Avril de l'an 1739, dans la cinquante-ſeptiéme année de ſon âge, & eſt enterré dans le Presbytére de *Boxworth*, comme il l'avoit demandé par ſon Teſtament.

Après cet abrégé de ſa vie, on s'attend apparemment à la deſcription de ſon caractére: mais j'avoue ingénument que je me trouve également incapable d'employer d'aſſez vives couleurs pour dépeindre un caractére auſſi brillant, & de placer mon tableau dans ſon véritable point de vue. C'eſt un étrange phénoméne qu'un Aveugle devenu grand Mathématicien; auſſi ce phénoméne a-t-il été admiré dans tous les ſiécles où il a paru. *Cicéron* en parle comme d'une choſe à peu près incroyable, & dont cependant *Diodote*, ſon Maître en Philoſophie, lui avoit fourni un exemple[a], „ *Diodote*, dit-il, s'appliquoit avec plus d'aſſiduïté „ à l'étude de la Philoſophie, après avoir perdu l'uſage de la vue; „ &, ce qui m'a toujours paru un prodige, il enſeignoit la Géo„ métrie avec tant de netteté, que ſes diſciples n'avoient pas la „ moindre peine à comprendre comment ils devoient tracer les „ figures les plus composées". *St. Jérôme* rapporte un exem„ ple encore plus frappant de *Didyme*[b] d'*Alexandrie*, qui, „ quoiqu'aveugle dès ſon enfance, & par cela même ignorant „ l'uſage des lettres, cauſa un étonnement général, en appre„ nant en perfection non ſeulement la Dialectique, mais auſſi „ la Géométrie, qui paroît avoir abſolument beſoin de la vue". La grande habileté de *Didyme* a été célébrée, entre autres Hiſtoriens, par *Caſſiodore*, qui fait mention d'un *Aſiatique*, nommé *Euſébe*[c], „ lequel, à ce qu'il diſoit de lui-même, avoit été „ aveugle depuis l'âge de cinq ans, ce qui ne l'avoit pas empê„ ché d'acquérir quantité de belles connoiſſances qu'il commu„ niquoit aux autres avec la plus grande clarté". *Trithême* par-

a Cic. Tuſc. Diſp. V. 39. *Diodotus Stoïcus, cæcus multos annos noſtræ domi vixit; is verò, quod credibile vix eſſet, cùm in Philoſophia multò etiam magis aſſiduè quam antea verſaretur, —— tum quod ſine oculis fieri poſſe vix videtur, Geometriæ munus tuebatur, præcipiens diſcentibus, unde, quo, quamque lineam ſcriberent.*

b Hieronymus de Viris Illuſt. Cap. CIX. *Didymus Alexandrinus captus a parva ætate oculis, & ob id elementorum quoque ignarus, tantum miraculum ſui omnibus præbuit, ut Dialecticam quoque & Geometriam, quæ vel maximè viſu indiget, uſque ad perfectum didicerit.*

c Caſſiodorus de Inſt. Div. Liter. cap. 5. tradit *de partibus Aſiæ quendam ad nos* veniſſe *Euſebium nomine, qui ſe infantem quinque annorum ſic cæcatum eſſe narrabat, ut ſiniſtrum ejus oculum fuiſſe excavatum orbis profundiſſimus indicaret: dexter verò globus vitreo colore confuſus ſine videndi gratia infructuoſis niſibus volvebatur. Hic —— diſciplinas omnes & animo retinebat, & expoſitione planiſſima lucidabat.*

parle aussi d'un certain „ *Nicaise*[a] de *Malines*, qui, quoiqu'aveu-
„ gle depuis l'âge de trois ans, cependant, tel qu'un autre *Di-*
„ *dyme*, devint un si grand Maître en fait de Sciences Divines
„ & Humaines, qu'il enseigna publiquement dans l'Université
„ de *Cologne* le Droit Canon & le Droit Civil, citant de mémoi-
„ re quantité de longs passages, qu'il n'avoit jamais lus". Un *Hollandois*, dont on m'a parlé, & divers autres encore pourroient grossir la liste de ces hommes merveilleux.

C'est une chose remarquable, que parmi le petit nombre de ceux qui ont été aveugles depuis leur enfance, & parmi le nombre bien plus petit encore de ceux d'entre eux qui ont surmonté les difficultés de leur état, on en ait vu tant exceller en savoir, & particuliérement dans les Mathématiques, comme les deux premiers dont nous avons fait mention, l'ont fait *certainement*, & *probablement* aussi les deux autres. Mais si nous considérons que les idées de la Quantité étendue, qui forment les principaux objets des Mathématiques, peuvent aussi bien s'acquérir par l'attouchement que par la vue; qu'une attention fixe & continuelle est la première qualité qu'exige cette étude, & que les Aveugles sont nécessairement moins distraits que d'autres, nous trouverons peut-être la cause qui fait que cette Science est adaptée plus qu'aucune autre à leur situation. On assure que *Démocrite* se priva lui-même de la faculté de voir, pour penser avec plus d'attention, „ persuadé, dit *Cicéron*[b], que la
„ vue empêche qu'on ne puisse méditer profondément". Et notre Professeur a mille fois eu occasion d'observer, que les Figures, dont le but est d'aider l'imagination, servent fréquemment à égarer le jugement. Il est certain, quelque utiles qu'elles puissent être aux commençans, que l'inventeur doit dans tous les cas aller en avant sans elles. La figure doit être présente à son imagination d'une façon aussi générale que la proposition même, & telle qu'il n'est pas possible de la tracer sur le papier. Et je suis convaincu que tout Mathématicien qui voudra

a Trithemius de Scriptoribus Eccles. N. DCCCLXXVI: *Nicasius de Voerda, Mechliniensis, —— captus à tertio ætatis suæ anno oculis, —— secundum nostra ætate Didymum Alexandrinum exhibuit, dum in omni doctrina & scientia, tam divina quam humana eruditissimus evasit. Nam in gymnasio Coloniensi —— jura publicè docuit, libros utriusque juris, quos nunquam vidit, auditu didicit, tenuit mente, apertè recitavit.*

b Cic. Tusc. Disp. V. 39. *Democritus —— impediri etiam animi aciem aspectu oculorum arbitrabatur.*

dra faire des découvertes, & renchérir sur ce qu'il a lu dans des Livres, trouvera la capacité & les forces de son ame augmentées, s'il s'accoutume à penser & à raisonner, en fermant les yeux à la lumiére, ou bien en se tenant dans quelque endroit aussi obscur pour lui que l'Univers l'est pour un Aveugle. Mais un homme qui a le malheur d'être aveugle, & qui par cela même est exemt des distractions que produit la vue, pourra rentrer plus fréquemment & plus avant en lui-même, & n'ayant presque aucun autre amusement que la recherche de la vérité, sera bien plus en état encore d'exceller dans des Sciences abstraites.

Il se pourroit très-bien aussi que la même recette fût très-bonne dans d'autres occasions, & particuliérement en Musique & en Poësie. A-la-vérité il est nécessaire que le Poëte ait auparavant l'imagination ornée de la belle variété d'images que fournissent l'Art & la Nature, & qu'il ne peut avoir acquises qu'à l'aide de la vue. S'il se trouve ensuite privé de ce sens, *Une Lumiére céleste en éclairera d'autant mieux toutes les puissances de son ame*, comme MILTON s'exprime. Aussi trouvons-nous parmi ceux qui se sont attachés à l'Epopée, (la plus haute entreprise que puisse tenter un favori d'*Apollon*) deux Poëtes aveugles, qu'on peut dire supérieurs à tous ceux qui ont travaillé dans le même genre depuis la création du Monde. Et je ne saurois assez m'étonner que l'ingénieux Auteur qui a fait des recherches touchant la vie & les écrits d'*Homére*, & qui a tâché de rendre raison de la grandeur de son génie, en rassemblant un certain nombre de causes naturelles, n'ait pas dit un mot du remarquable trait de conformité que notre Poëte avoit avec l'Auteur de l'*Iliade*.

Ce ne fut que par le sens du Toucher que Mr. SAUNDERSON acquit d'abord la plupart de ses idées, & ce sens étoit en lui d'une finesse extrême, comme cela arrive ordinairement aux Aveugles, par une espéce de dédommagement de la Nature, ou, ce qui est plus apparent, par la nécessité qui leur est imposée de le consulter à tout moment. Cependant il ne pouvoit pas, comme quelques personnes l'ont cru, (& comme Mr. BOYLE, fondé sur un témoignage peu digne de foi, le dit d'un homme de *Mastricht*) distinguer les couleurs à l'aide du Toucher. Après quantité d'essais faits à cet égard, notre Auteur décida que c'étoit une chose absolument impossible. Mais il distinguoit avec une précision merveilleuse la plus petite différence dans le

poli d'une surface. Par exemple, il discernoit dans une suite de Médailles *Romaines*, les vraies d'avec les fausses, quoique ces derniéres eussent été contrefaites au point de tromper un Connoisseur, qui en avoit jugé par la vue. Mais, dit le Professeur, „ Moi, qui n'avois pas ce sens à consulter, je sentois aisément „ assez d'inégalités dans les surfaces des Médailles nouvelles pour „ ne les pas confondre avec les autres". Dès qu'il y avoit le moindre changement dans l'Atmosphére, il s'en appercevoit d'abord; & je me souviens même qu'étant un jour avec lui & d'autres dans un Jardin, il remarquoit aussi bien que nous toutes les fois que quelque nuage obscurcissoit les rayons du Soleil. Il sentoit quand on tenoit un objet près de son visage, ou quand il passoit à une petite distance de quelque arbre, pourvu que l'air fût serein, & qu'il ne fît presque point de vent. C'étoit par les impressions de l'air sur son visage qu'il s'appercevoit de ces différens changemens.

Ce seroit un article fort curieux que celui de toutes les ressources qu'il avoit trouvéés pour suppléer au sens de la vue. Il avoit une planchette percée de trous à la distance d'un demi-pouce l'un de l'autre: chaque trou contenoit une cheville; & c'étoit en passant un fil autour des têtes de ces chevilles, qu'il traçoit toutes les figures rectilignes, dont on se sert en Géométrie, plus vite qu'un autre n'auroit pu faire avec la plume. Il avoit une autre planchette avec des trous disposés en lignes droites pour recevoir des chevilles de différentes grandeurs. Au moyen de cette derniére planchette, il faisoit les quatre opérations ordinaires de l'Arithmétique aussi exactement que d'autres les font par écrit. Il se servoit d'une sphére armillaire, de quelques figures de Géométrie disposées dans différens Plans, des Solides réguliers taillés en bois, & de la forme de plusieurs courbes faites de la même maniére, pour donner à ses disciples les plus claires idées de ces sortes de sujets.

La finesse de l'ouïe est une espéce de dédommagement qui accompagne ordinairement la privation de la vue. Notre Professeur éprouva la vérité de cette observation: il distinguoit jusqu'à la cinquiéme partie d'une note, & jouoit de la flûte (ce qu'il avoit appris au sortir de l'enfance comme un amusement) d'une maniére qui marquoit un tel génie pour la Musique, qu'il auroit, suivant toutes les apparences, autant excellé dans cet Art, que

que dans les Mathématiques, s'il l'avoit cultivé avec la même application. Il conſervoit dans ſa mémoire le ſouvenir du ſon de la voix de ceux-là mêmes qu'il n'avoit vus qu'une ſeule fois, & par un moyen tout pareil il ſe ſouvenoit des lieux où il avoit été. Quand on le menoit dans quelque appartement, il en déterminoit la grandeur au moyen des ſons réfléchis par la muraille: & s'il lui étoit jamais arrivé de ſe promener ſur quelque pavé uni, & qu'on le ramenât au même endroit, il ſavoit dire exactement en quel endroit de la promenade il ſe trouvoit.

Le Lecteur ne pourra qu'admirer la force de ſa mémoire, qui le mettoit en état non ſeulement de multiplier & de diviſer de très-grands nombres, mais auſſi d'en tirer la racine, quarrée ou cubique; il ne cédoit à aucun Calculateur dans la facilité à réſoudre des Problêmes Algébraïques, à ſommer des Suites infinies &c.; & corrigeoit ſur le champ les fautes qui étoient échappées à un Auteur dont on lui liſoit l'Ouvrage, tant rélativement aux ſignes qu'aux nombres. Ceux qui lui liſoient quelques Ouvrages difficiles, avoient ſouvent occaſion de s'étonner de ſon extrême ſagacité, de la promtitude avec laquelle il concevoit les choſes, comme auſſi de ſa facilité à ſuivre le fil d'un raiſonnement, & de l'art avec lequel il ſavoit choiſir les parties les plus propres à lui rappeller une juſte idée du tout. Dans les parties les plus abſtraites des Mathématiques, quand le nombre des conditions étoit grand & avoit quelque choſe d'embarraſſé, on trouvoit ſouvent quelque peine à exciter en lui une idée diſtincte & claire: mais la choſe une fois faite, il lui arrivoit rarement, ou plutôt jamais, d'avoir beſoin de quelque nouveau ſecours; ſon ame retenant fortement les impreſſions, pourvu qu'elles fuſſent duement faites. A l'aide de ces puiſſantes facultés, une imagination claire, une mémoire fidéle, & une raiſon également promte & réglée dans ſes opérations, les Livres de Mathématiques lui étoient toujours ouverts, ſon ame appercevoit chaque vérité dans toutes ſes ſuites & ſes connexions, ce qui lui procuroit le moyen de fonder chaque choſe ſur les principes les plus ſimples; & quand il s'agiſſoit d'en réunir pluſieurs enſemble, il les compoſoit avec un ordre & une ſymétrie admirables.

Comme il ne le cédoit à perſonne en connoiſſances Mathématiques, il avoit auſſi pour enſeigner un talent véritablement ſupérieur. Ce talent frappa le plus dès ſa première entrée dans le

Mon-

Monde, & doit naturellement avoir été encore augmenté & perfectionné par l'usage. Il démêloit avec une merveilleuse sagacité les difficultés qui arrêtoient le plus les commençans, & les écartoit de leur chemin. Ses expressions étoient si nettes & si précises, qu'aucun de ses disciples n'avoit la moindre peine à le comprendre. Il étoit particuliérement heureux dans l'Art de rendre une démonstration plus facile, & j'ose en appeller à l'Ouvrage suivant, si les différentes Propositions qui ont passé par les mains d'*Euclide*, d'*Archiméde*, de *Diophante*, & des autres grands Maîtres tant anciens que modernes, ne sont pas devenues plus aisées entre les siennes, par le soin qu'il a eu de leur donner des fondemens plus simples & plus unis.

Son inclination le portoit à étudier la partie la moins abstraite, & par cela même la plus utile des Mathématiques. Une Proposition devoit être bonne à quelque chose pour obtenir son attention. Il falloit ou que la méthode de rechercher telle ou telle vérité contribuât à former davantage l'Entendement, & enseignât quelque nouveau tour de raisonnement, ou que la Proposition même tendît au bien de la Société ou de la Science. Il considéroit les Mathématiques comme la clef de la Philosophie, comme le fil destiné à diriger nos pas au travers des labyrinthes secrets de la Nature; & pensoit que l'ame étoit bien mieux occupée & plus perfectionnée en démêlant ses Ouvrages, qu'en étudiant les plus subtiles propriétés de la grandeur envisagée d'une maniére abstraite.

Pour ce qui est des méthodes de raisonner qu'on distingue l'une de l'autre par les épithétes de *Géométrique* & d'*Analytique*, dont chacune a ses partisans parmi les Mathématiciens de nos jours, Mr. SAUNDERSON rendoit justice à toutes deux, en donnant la préférence à chacune d'elles suivant les occasions où il falloit en faire usage. Il préféroit la méthode *Géométrique* comme plus lumineuse, en cas que l'application n'en exigeât pas plus de peine. Mais comme le contraire avoit souvent lieu, & que par la méthode *Analytique* on avance dans les Mathématiques plus vite & plus loin que par toutes les méthodes des Anciens, & que l'Analyse est le vrai Art d'invention, il croyoit que les Modernes en avoient tiré de très-grands avantages.

L'attente & les désirs de bien des gens n'eurent pas le pouvoir d'engager notre Professeur dans la vive querelle qui partagea

gea

gea en dernier lieu les Mathématiciens au ſujet de l'*Algorithme* ou de la Doctrine des *Fluxions*. Ce n'eſt pas qu'il n'eût le reſpect le plus profond pour la mémoire de NEWTON, & qu'il ne fût perſuadé que ſon Syſtême de l'Infini s'accordât avec les plus ſévéres règles de la Géométrie: il reconnoiſſoit à-la-vérité que le grand inventeur de ce ſyſtême, ne s'imaginant en aucune maniére avoir à craindre les plus ſubtiles chicanes, ne s'étoit pas exprimé partout avec autant de préciſion qu'il auroit pu faire ſans cela; car il écrivoit uniquement pour ceux qui aimoient la vérité auſſi ſincérement qu'il faiſoit lui-même. Mais l'averſion générale que Mr. SAUNDERSON ſe ſentoit pour tous les écrits polémiques l'empêcha d'entrer dans cette controverſe. Cependant comme il avoit deſſein d'augmenter ſon *Algébre* d'un troiſiéme volume, dont la nature de l'*Algorithme* & la maniére de l'employer devoient former la principale matiére, il n'auroit pas manqué de répondre indirectement à toutes les objections qui avoient été propoſées.

Je ne dois pas oublier à cette occaſion de marquer la haute vénération que notre Profeſſeur témoignoit toujours pour le nom du Chevalier NEWTON. Il diſoit, que toutes les fois qu'il lui étoit arrivé d'avoir en Mathématiques ou en Philoſophie des ſentimens différens des ſiens, il avoit, après un examen plus attentif, conſtamment trouvé que le tort étoit de ſon côté. Plus il liſoit ſes Ouvrages en étudiant la Nature, & plus il ſe ſentoit obligé d'admirer le ſoin & le bonheur que ce Philoſophe incomparable avoit eu de s'exprimer avec toute l'exactitude poſſible. Il nous a laiſſé ſur le Livre de ſes Principes quelques obſervations, qui non ſeulement en expliquent les endroits les plus difficiles, mais ſouvent renchériſſent ſur le texte qu'elles étoient deſtinées à éclaircir, & qui, telles qu'elles ſont, ſeroient un préſent agréable au Public, quoique bien au-deſſous de ce qu'elles auroient été s'il y avoit mis la derniére main.

Notre Auteur avoit compoſé quelque choſe pour l'uſage de ſes Diſciples ſur presque toutes les parties des Mathématiques. Mais il ne paroiſſoit pas dans l'intention de publier aucun de ces Ouvrages, juſqu'à l'an 1733: quand ſes Amis, allarmés d'un violent accès de fiévre qui auroit pu aiſément l'emporter, le ſollicitérent fortement de retrancher une partie du tems qu'il donnoit à ſes colléges (& qui alloit alors à ſept ou huit heures par

jour, au préjudice extrême de sa santé,) & de l'employer à finir quelques-uns de ses Ouvrages, dont il pourroit faire un legs de grand prix à sa famille & au Public. Il se rendit à ces instances au-moins en partie, & composa en assez peu de tems ce Traité d'Algébre, qu'il fit mettre au net pour être donné à la presse.

Ce seroit une peine inutile de m'étendre beaucoup sur la nature de cet Ouvrage, le Lecteur n'ayant qu'à jetter les yeux sur la table des principales matiéres, & qu'à parcourir le Livre même. J'observerai simplement, qu'il étoit particuliérement destiné à l'instruction des commençans, & pour l'usage de ceux qui se vouöient au métier d'instruire la Jeunesse. C'est ce qui avoit déterminé notre Auteur à ne rien négliger de ce qui pouvoit contribuer à rendre ses idées claires & faciles à comprendre. Son but étoit non seulement de faire ensorte que son cours d'Algébre fût complet, mais aussi de contribuer à l'avancement de la Géométrie, en écartant ou résolvant toutes les difficultés qui lui avoient paru, durant tant d'années qu'il avoit passées à enseigner, les plus propres à arrêter les progrès des commençans dans l'étude des Elémens d'*Euclide*. Outre cela, comme l'Algébre est par sa nature un Art de raisonner, & peut être considérée comme la Logique du Mathématicien, l'Auteur s'est attaché par-tout à nous fournir chaque méthode de raisonner qui peut nous aider dans nos recherches de la Nature. Il a fréquemment exposé les mêmes vérités sous différens points de vue, en nous y faisant arriver par différens chemins. Plus d'une fois aussi il a eu soin d'observer la transition de la vérité d'une Loi à une autre, & la consistence de ses différentes Loix dans les cas les plus compliqués, où ces Loix semblent le plus se contredire, comme si la Nature avoit recours à ses derniers expédiens pour conserver cette uniformité, qui est une des marques caractéristiques de la vérité. De pareilles observations ne peuvent que suggérer à l'ame les moyens les plus simples & les plus naturels de faire de nouvelles découvertes, & doivent par conséquent être grandement instructives, aussi-bien qu'agréables à ceux qui aspirent à des découvertes de ce genre.

Les savans Mathématiciens feroient tort néanmoins à la capacité de notre Auteur, s'ils en jugeoient par l'Ouvrage suivant, qui est bien au-dessous d'un aussi beau génie que le sien. Mais le Lecteur pourra au-moins apprendre par-là combien il doit dé-

déplorer la fin prématurée d'une vie, qui, si elle avoit duré encore quelques années, auroit enrichi le Monde savant, & transmis à la postérité un grand nombre d'admirables productions. Les manuscrits de Mr. SAUNDERSON ont tous été confiés (pour le bien de ses enfans) au soin & à la direction de Mr. J. ROBARTES de *Twickenham*, présentement Comte de RADNOR, qui disposera de ces précieux restes de la maniére la plus avantageuse aux Sciences, & la plus honorable à leur Auteur: assertion, que nous fondons sur l'affection & l'estime que le Comte de RADNOR a toujours témoignées pour les Sciences, aussi bien que pour les Savans, & particuliérement pour Mr. SAUNDERSON.

Les talens de ce Grand-homme n'étoient pas restreints à l'étude; sa conversation étoit pleine d'agrémens & d'esprit, & il faisoit si souvent des allusions ingénieuses aux objets de la vue qu'on oublioit quelquefois qu'il étoit aveugle. On ne remarqua jamais en lui, ni travers d'humeur, ni aucune de ces distractions peu obligeantes qu'on est quelquefois en droit de reprocher à ceux qui s'appliquent aux études les plus sérieuses. Ses jugemens sur les différentes passions & sur les intérêts du Genre-Humain ne marquoient pas moins de pénétration que quand il prononçoit sur des sujets de Philosophie. Il s'exprimoit avec une vivacité & une force qui surprenoient & fixoient l'attention de tous ceux qui l'entendoient. Mais surtout, son amour sincére & son profond respect pour la vérité brillérent dans tout le cours de sa vie, & ajoûtérent un nouveau lustre à ses plus éclatantes qualités. Il exprimoit toujours sans partialité ni réserve ses sentimens au sujet des Hommes & des Opinions, & témoignoit la même franchise en louant une chose ou en la blâmant. Ces qualités qui augmentoient à son égard l'attachement & l'estime de ses Amis, lui suscitérent quelques ennemis, & l'exposérent à des animosités, que des gens, qui auroient eu plus d'art & plus de complaisance, se seroient épargnées, aux dépens d'une sincérité scrupuleuse & desintéressée.

Il ne me reste, pour achever ces Mémoires de la Vie du Dr. SAUNDERSON, qu'un mot à dire sur la maniére dont il la résigna. Mr. HOLMES l'informa que la mortification gagnoit si fort, que ses meilleurs Amis n'osoient se flatter de son rétablissement. Il reçut cette nouvelle d'une mort prochaine avec beaucoup de

calme & de férénité; & après un court filence, il reprit fon air ordinaire, & entretint ceux qui étoient autour de lui avec autant de préfence d'efprit qu'il avoit jamais fait dans les heures les plus tranquilles de la plus parfaite fanté. Il fixa le foir du lendemain pour recevoir la Communion des mains de Mr. HOLMES; mais avant que ce Miniftre vînt, le Malade tomba dans un délire, qui dura jusqu'à fa mort.



L'ARITHMETIQUE PALPABLE DU DOCTEUR SAUNDERSON, DECHIFFRÉE.

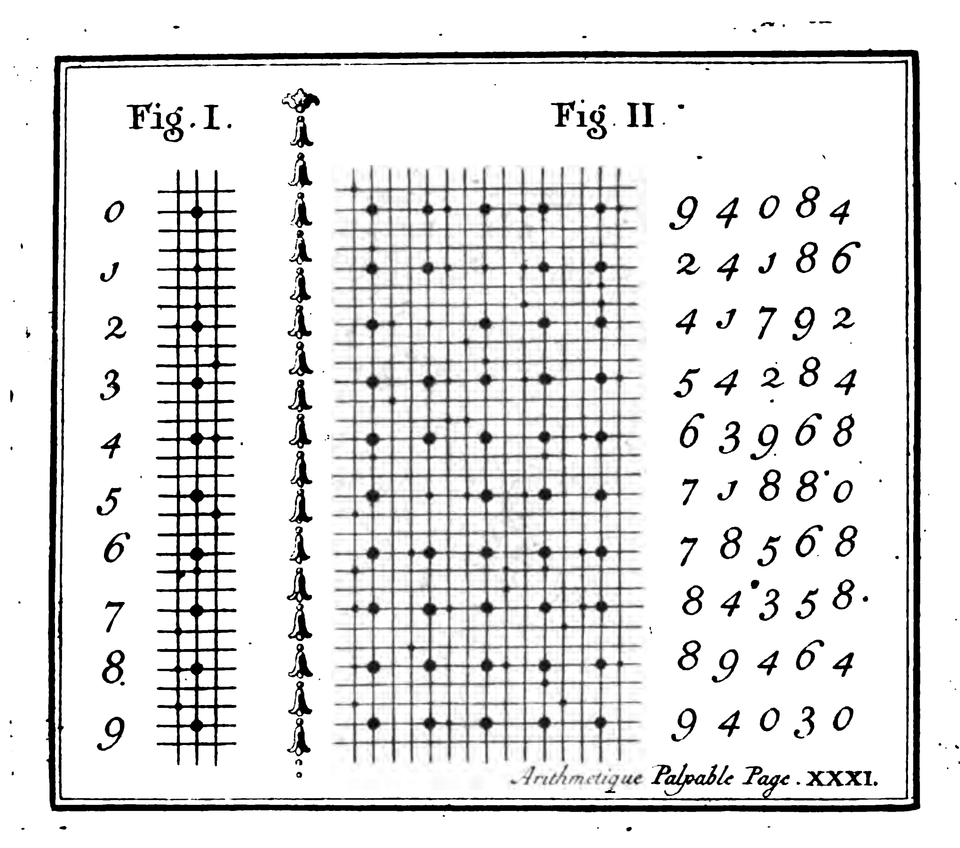
L'Auteur de la Piéce ſuivante ayant remplacé le Dr. SAUNDERSON *en qualité de Profeſſeur, a bien voulu permettre qu'on inſérât cette Piéce ici, pour ſervir d'éclairciſſement à une des inventions de ſon illuſtre prédéceſſeur, quoiqu'il eût d'abord eu deſſein de la placer ailleurs.*

LE fameux Dr. SAUNDERSON, Profeſſeur en Mathématiques dans l'Univerſité de *Cambridge*, nonobſtant la perte de ſa vue, étoit capable de faire de longs calculs Arithmétiques & Algébraïques. C'eſt ce qui paroît, non ſeulement par ſon excellent Traité d'Algébre, qui vient d'être publié, mais auſſi par d'autres monumens inconteſtables, & qui ſubſiſtent encore. Il avoit conſtruit pour ſon uſage particulier une Planchette à calculer, au moyen de laquelle il pouvoit faire promtement toutes les opérations Arithmétiques, par le ſeul ſens du Toucher. Voila pourquoi j'ai appellé cette invention ſon *Arithmétique Palpable*. Comme j'ai eu occaſion, par un effet de la bonté de Madame SAUNDERSON, de voir & d'examiner divers échantillons de cette Arithmétique, qu'il avoit achevés, quoiqu'il n'ait pas laiſſé le moindre indice à l'aide duquel on puiſſe découvrir ſa méthode, j'eus la curioſité d'eſſayer de les déchiffrer (ſi j'oſe parler ainſi), & la choſe m'a réuſſi au-delà de mon attente. Or comme d'autres pourroient avoir la même curioſité, & que d'ailleurs cette méthode feroit d'uſage à des perſonnes qui auroient eu auſſi le malheur de perdre la vue, je tâcherai d'en donner l'idée la plus nette qu'il me ſera poſſible.

Sa Planchette à calculer eſt mince & unie, & a un peu plus qu'un pied en quarré: elle ſe trouve enchaſſée dans un petit cadre, dont les

bords s'élévent tant soit peu au-dessus de la Planchette, qui contient un grand nombre de lignes paralléles à d'égales distances l'une de l'autre, & d'autres paralléles en même nombre, formant des angles droits avec les premiéres. Les bords de la Planchette ont des rainûres, à la distance d'environ un demi-pouce l'une de l'autre, & à chaque rainûre appartiennent cinq des paralléles dont nous venons de parler; si bien que chaque pouce quarré est divisé en cent petits quarrés. À chaque point d'intersection la Planchette est percée d'un petit trou destiné à recevoir une cheville; car c'est au moyen de ces chevilles qu'il exprimoit ses nombres. Il employoit deux sortes de chevilles de différente grandeur; au-moins leurs têtes étoient différentes, & se distinguoient sans peine par l'attouchement. Il avoit dans deux boëtes, qui étoient toujours devant lui, une grande quantité de ces chevilles, dont les pointes étoient ôtées. Voyons présentement l'usage qu'il faisoit du tout.

Pour cet effet, nous obferverons d'abord, que chaque caractére numérique a dans la Planchette son petit quarré particulier, composé de quatre autres petits quarrés contigus décrits ci-dessus, & qui par cela même laissent un petit intervalle entre chaque caractére; & ce caractére étoit différent suivant la différence de grandeur ou de situation d'une ou de deux chevilles, dont il étoit toujours composé. Voici le systême qu'il s'étoit formé. Une grande cheville au centre du Quarré (& c'étoit-là son unique place) signifie un zéro; c'est pourquoi je la désignerai par ce nom. Sa principale fonction consiste à conserver l'ordre & la distance entre les caractéres & les lignes. Ce zéro est toujours présent, excepté le seul cas où il s'agit de marquer l'unité, qui est exprimée par la substitution d'une petite cheville à la place de la grande cheville qui est au centre. S'il faut exprimer 2, le zéro doit être remis à sa place, & la petite cheville placée précisément au-dessus. Pour exprimer 3 le zéro doit rester où il est, & la petite cheville être fixée à l'angle supérieur vers la droite. Pour exprimer 4, la petite cheville descend, & suit immédiatement le zéro. Pour exprimer 5, la petite cheville descend jusqu'à l'angle inférieur à la droite. Pour exprimer 6, la petite cheville doit être au-dessous de zéro. Pour exprimer 7, la place de la petite cheville est l'angle inférieur à la gauche. Pour exprimer 8, la pétite cheville


Fig. I.
Fig. II
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
94084
24186
41792
54284
63968
71880
78568
84358
89464
94030
Arithmetique Palpable Page. XXXI.

cheville monte, jusqu'à ce qu'elle soit à la même hauteur que le zéro. Enfin, pour exprimer 9, la petite cheville occupe l'angle supérieur à la gauche. Par cette invention, les dix caractéres numériques pouvoient se connoître sans peine au moyen du seul attouchement. Mais pour que le Lecteur se forme une idée plus distincte de ces caractéres, il est prié de jetter les yeux sur la *Fig.* I.

Tel étoit le moyen dont il se servoit pour tracer sur sa Tablette un nombre quelconque; & quand le caractére étoit tracé, il n'avoit qu'à le parcourir légérement des doigts pour savoir ce qu'il signifioit. Les grandes chevilles ou zéros, qui étoient toujours aux centres des petits Quarrés, & le plus souvent à d'égales distances l'une de l'autre, lui servoient de guide pour garder la ligne, pour fixer les limites de chaque caractére, & empêcher toutes les autres méprises qui pourroient avoir lieu sans cela. Comme trois des paralléles perpendiculaires suffisent pour un seul caractére, trois des paralléles horizontales suffisent pour une ligne de caractéres, & les trois paralléles suivantes pour une autre ligne, & ainsi de suite, sans aucun risque de les confondre. Et de cette maniére on concevra aisément, comment il pouvoit avoir à la fois sur sa Planchette quelques lignes de caractéres, l'une au-dessous de l'autre; ou comment il pouvoit dériver un nombre d'un autre; ou, en un mot, comment il pouvoit faire les calculs requis. Il plaçoit & déplaçoit ses chevilles, à ce qu'on m'a assuré, avec une vitesse & une facilité incroyables, au grand étonnement de tous les spectateurs. Quelquefois il interrompoit un calcul déjà avancé, & en reprenoit le fil quand il vouloit, sachant d'abord où il en étoit, simplement en parcourant des doigts sa Planchette. Il y a un expédient, qui, surtout dans de longs calculs, auroit considérablement abrégé le travail, & ainsi je ne doute pas qu'il n'y ait eu recours très-souvent. Cet expédient consiste à préparer la Planchette d'avance, (ce que tout autre pouvoit faire pour lui,) en garnissant de grandes chevilles, c'est-à-dire de zéros, chaque troisiéme trou de chaque troisiéme ligne paralléle. En voulant faire ensuite quelque calcul, il ne lui restoit qu'à completer chaque caractére, en plaçant une petite cheville où il le falloit: excepté quand il étoit question d'exprimer une unité, auquel cas il devoit changer la grande cheville en une petite.

Les

Les échantillons de cette Arithmétique que j'ai parcourus & réduits à des nombres vulgaires, consistent dans des Tables Arithmétiques, qu'il avoit calculées & gardées pour son propre usage ; mais je ne saurois deviner le but qu'il s'est proposé en les calculant. Elles semblent avoir quelque rapport aux Tables des Sinus naturels, des Tangentes, & des Sécantes, & consistent en quatre piéces de bois solide, ayant la forme de parallépipédes rectangles, & environ onze pouces de longueur sur cinq & demi de largeur, & quelquefois plus d'un demi pouce d'épaisseur. Les deux Faces opposées de chacun de ces parallépipédes sont partagées en petits Quarrés précisément comme la Planchette décrite ci-dessus, mais n'ont de trous qu'aux endroits nécessaires, les chevilles y étant affermies. Chaque Face contient neuf petites Tables Arithmétiques, chacune de dix nombres, & chaque nombre, généralement parlant, est composé de cinq caractéres. Pour rendre cet article plus intelligible, j'ai joint ici une de ces petites Tables, telle que je l'ai trouvée, avec mon interprétation. Voyez la *Fig.* II.

Mais outre l'usage Arithmétique de cette Table, qu'il s'étoit principalement proposé en la construisant, il s'en servoit aussi pour décrire exactement des Figures Géométriques, composées de lignes droites, & s'entre-coupant à différens angles, dont j'ai vu quelques exemples. Il faisoit la chose de deux façons, ou par des chevilles mises en rangs, qui ressembloient à des lignes ponctuées, ou bien par des chevilles placées aux interfections. En passant ensuite un fil de soye autour des têtes, il décrivoit à volonté des lignes droites telles qu'il les vouloit. Il ne paroît pas qu'il ait eu aussi quelques Lettres Palpables, semblables à nos Caractéres d'Imprimerie, pour distinguer les divers points angulaires, & pour l'aider à démontrer les propriétés de ces Figures. S'il avoit eu besoin de pareils secours, son génie inventif n'auroit pas manqué de les lui fournir. On concevra aisément, que la même Table pouvoit servir à représenter toutes sortes d'Equations Algébraïques, & servir aux différentes Réductions de ces Equations, surtout à l'aide des caractéres que nous venons d'indiquer, ou de quelque chose d'analogue à cela. Et rien n'empêche qu'il n'ait eu des caractéres en forme de chevilles, pour les signes Algébraïques ordinaires, & pour exposer plus

plus diſtinctement à ſes Diſciples les différentes opérations; ce qui auroit donné à ſa Planchette quelque air d'une Forme d'Imprimerie, qu'il auroit pu (j'en ſuis ſûr) lire par le ſeul attouchement, s'il avoit pris la peine de s'y appliquer. Des gens dignes de foi m'ont dit qu'il épelloit fort bien; qu'il connoiſſoit les figures des Lettres, tant petites que capitales, & qu'il s'amuſoit quelquefois, quand l'occaſion s'en préſentoit, à lire avec ſes doigts les Inſcriptions gravées ſur des Pierres Sépulcrales. On l'a entendu aſſez fréquemment ſe plaindre de n'avoir pas appris dans ſa jeuneſſe à écrire, ne doutant nullement qu'il n'en fût venu à bout. Aucune de ces choſes ne paroîtra incroyable à ceux qui ſavent combien il étoit habile à juger de la bonté d'un Inſtrument de Mathématique, & de la juſteſſe de ſes diviſions, en ne l'examinant que par le ſeul attouchement; & on l'a conſulté plus d'une fois ſur ce ſujet. Ceci au-moins eſt certain, qu'il manioit toute ſorte d'équations, & autres calculs embarraſſés, avec beaucoup d'intelligence & de dextérité. Je n'entreprendrai point cependant de déterminer juſqu'à quel point il ſe repoſoit ſur la force de ſon imagination (qui étoit prodigieuſe), & en quel cas il avoit recours à des inventions Méchaniques pour la ſoulager.

Après les merveilles que je viens de décrire, & quelques autres du même genre que j'ai vues, il ne me reſte plus qu'à faire cette obſervation générale, que comme la connoiſſance & l'uſage des Symboles (c'eſt-à-dire des ſignes ſenſibles & arbitraires de quelques idées purement intellectuelles) eſt de la plus grande importance & d'une immenſe étendue dans toutes les parties des Mathématiques, notre incomparable Auteur avoit inventé une nouvelle eſpéce de Symboles Mathématiques, dont on n'avoit jamais entendu parler auparavant, & qui étoit particuliérement adaptée à ſa ſituation. Les Symboles ſenſibles, dont on ſe ſert communément pour repréſenter des idées Mathématiques, & pour les communiquer à notre ame ou à celle des autres, ont rapport à l'ouïe ou à la vue. Mr. SAUNDERSON a véritablement tiré grand parti des Symboles rélatifs à l'ouïe, & doit une partie conſidérable de ſes connoiſſances aux converſations qu'il a eues avec d'autres, quoique principalement à la lecture qu'on lui a faite des meilleurs Mathématiciens. Mais

il étoit entiérement privé de l'usage des Symboles visibles, qui nous paroissent bien nécessaires, puisque ce n'est que par leur moyen que nous avons acquis la meilleure partie de nos connoissances Mathématiques. Que fit-il pour vaincre un obstacle qui sembloit insurmontable? Il eut recours à un autre sens, qu'il possédoit à un grand dégré de perfection, & substitua le tact à la vue, en inventant une sorte de Symboles Mathématiques, qu'on pourroit appeller Symboles Palpables. Ce fut à leur aide qu'il fit passer dans son entendement des idées, auxquelles l'entrée par ses yeux étoit refusée. Ainsi par le secours de ces Symboles, qui ne pouvoient qu'être très-imparfaits, & au moyen d'une conception prompte, & d'une persévérance obstinée, il fit dans l'étude des Mathématiques des progrès qui lui attirérent une admiration générale. Tels furent les instrumens, bien peu proportionnés à l'effet qu'ils produisirent, dont il se servit pour acquérir les idées Mathématiques les plus abstraites & les plus sublimes, & qui le mirent en état de déduire de ces idées des conclusions générales & très-utiles. Tout homme qui aura des yeux, quelque intelligence, & tant soit peu de candeur, ne sauroit disconvenir que ce Phénoméne ne soit tout-à-fait surprenant. Mon imagination est saisie d'étonnement, quand je me représente que, durant tout le cours de ses études, ce Grand-homme a lutté avec des forces inégales contre les plus terribles découragemens, & que cependant sa sagacité, son industrie & sa patience l'avoient mis en état de surmonter toutes les difficultés qu'il avoit rencontrées en son chemin. Un si heureux succès étoit dû à ses travaux, & à la noble ambition qu'il avoit conçue d'appartenir un jour à la premiére Classe des Mathématiciens.

TABLE

TABLE
DES
PRINCIPAUX ARTICLES.

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE I.

17.

LIVRE II.

LIVRE III.

LIVRE IV.

Des Problêmes généraux & des Théorêmes généraux qu'on peut en déduire; avec la manière d'appliquer & de démontrer ces Théorêmes.

rons

LIVRE V.

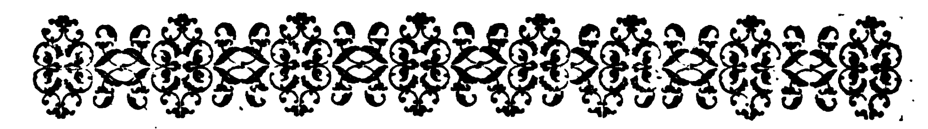
DES INCOMMENSURABLES.

ART. 192.

PROBLEMES SUSCEPTIBLES DE PLUSIEURS SOLUTIONS.

en

ELE-



AVIS AU LECTEUR.

AVant que d'entrer en matiére, je crois devoir avertir ceux qui voudroient tirer quelque fruit de la lecture de cet Ouvrage, que je leur suppose certaines connoissances préliminaires. Par exemple, ils doivent savoir ajoûter, soustraire, multiplier, diviser, trouver une quatriéme proportionelle, & extraire des racines, particuliérement la racine quarrée. Il est nécessaire qu'ils soient en état de faire ces opérations non seulement avec exactitude & sans peine, mais aussi de les appliquer aux différens cas, où elles sont d'usage; en un mot, il faut qu'ils entendent l'Arithmétique ordinaire, au moins relativement aux nombres entiers. C'est ce qui m'a engagé à proposer d'abord quelques questions Arithmétiques, qui pourront leur servir à essayer leurs forces, avant d'aller plus loin. La plupart de ces questions sont très-faciles. Peut-être auroient-elles pu être mieux choisies; mais j'ai pris les premiéres qui se sont offertes, impatient de traiter des sujets plus importans. Cependant quelles que soient les questions dont il s'agit, si on les étudie avec attention & avec soin, j'espére qu'elles pourront produire l'effet que j'en attends. Tout lecteur, qui ne trouvera aucune difficulté à les résoudre, aura lieu de se flatter que rien ne l'arrêtera dans la suite; au lieu que des difficultés insurmontables attendent ceux que des problêmes aussi aisés embarrasseront. Cet embarras cependant aura son utilité à leur égard, en ce qu'il les avertira de ce qui leur manque pour pouvoir être initiés aux Mystéres de l'Algébre.

N. B. Comme c'est peut-être trop exiger que de prétendre qu'un apprentif Arithméticien soit entiérement au fait de la règle de proportion, & de la règle pour l'extraction de la racine quarrée, je ne manquerai point, dès la premiére occasion qui s'en présentera, de démontrer ces règles, dont la pratique ne suppose d'autre habileté que de savoir faire les quatre premiéres Opérations de l'Arithmétique ordinaire.

Questions pour s'exercer à la Multiplication.

Multiplier c'est prendre un nombre, nommé le Multiplicande, autant de fois qu'il est exprimé par un autre nombre, nommé le Multiplicateur; & le nombre qui résulte de cette Opération, s'appelle le produit: d'où

il ſuit, que le produit contient le Multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le Multiplicateur; & que ſi un nombre, qui a un plus grand dénominateur doit être réduit à un nombre équivalent dont le dénomiteur ſoit plus petit, cela doit ſe faire par la Multiplication. Par exemple, dans une Livre ſterling il y a vingt ſchellings; ainſi dans chaque ſomme d'argent, qui conſiſte en Livres St. entiéres, il y a vingt fois autant de ſchellings, qu'il y a de Livres St.: donc ſi le nombre des Liv. St. eſt multiplié par 20, le produit eſt un nombre équivalent de ſchellings. Il en eſt de même dans tous les autres cas.

1. QUESTION.

Il faut réduire 456 Liv. ſt., 13 ſchellings, 4 deniers, en ſchellings deniers & liards.

N. B. Il y a douze ſous où deniers dans le ſchelling, & quatre liards dans le ſou ou denier.

Réponſe.	Schellings	9133
	Deniers	109600
	Liards	438400.

2. QUESTION.

Une certaine Ile contient 36 comtés, chaque comté 37 paroiſſes, chaque paroiſſe 38 familles, chaque famille 39 perſonnes : je demande le nombre des paroiſſes, des familles & des perſonnes que l'Ile contient.

Réponſe.	Paroiſſes	1332
	Familles	50616
	Perſonnes	1974024.

3. QUESTION.

En 1730 années, 42 ſemaines & 3 jours, combien y a-t-il de minutes?

N. B. Une année eſt de 365 jours & ſix heures, & une heure de ſoixante minutes.

Réponſe.	Heures dans une année	8766
	En 1730 années	15165180
	En 42 ſemaines & 3 jours	7128
	En tout	15172308
	Minutes en tout.	910338480.

4. QUES-

4. QUESTION.

Il y a un champ qui est long de 102004 *pieds, & large de* 102003 *pieds: je demande le nombre de pieds quarrés qu'il contient.*

Réponse. 10404714012.

5. QUESTION.

Le plancher d'une chambre est large de 24 *pieds,* 4 *pouces, & long de* 96 *pieds,* 6 *pouces: je demande combien de pouces quarrés il contient.*

Réponse. 338136 pouces quarrés.

6. QUESTION.

Un morceau de bois de 1 *pied* 2 *pouces d'épais, de* 3 *pieds* 4 *pouces de large, & de* 5 *pieds* 6 *pouces de long, doit être coupé en petits cubes, tels que des dés à jouer, dont chacun doit avoir un quart de pouce en tout sens: je demande en combien de petits cubes le morceau sera divisé.*

Réponse. 2365440.

7. QUESTION.

Je demande en combien d'ordres différens on peut sonner les 12 *cloches d'un Carillon.*

Réponse. *	avec	2	cloches	2
	avec	3	- -	6
	avec	4	- -	24
	avec	5	- -	120
	avec	6	- -	720
	avec	7	- -	5040
	avec	8	- -	40320
	avec	9	- -	362880
	avec	10	- -	3628800
	avec	11	- -	39916800
	avec	12	- -	479001600.

8. QUES-

* Un terme quelconque de cette suite donne par la Multiplication le terme suivant; savoir, en multipliant le nombre d'ordres du terme connu par le nombre des cloches de l'ordre qui suit immédiatement.

8. QUESTION.

De combien de différentes maniéres peuvent tomber quatre dés jettés tous à la fois?

Réponse. * De 1296 maniéres.

9. QUESTION.

Si quelqu'un parie d'amener un as en jettant quatre dés à la fois, quelle probabilité a-t-il de gagner?

Réponse. Par la réponse précédente, quatre dés peuvent tomber de 1296 maniéres différentes, ou sans as ou avec quelque as; par un calcul semblable, on trouve qu'ils peuvent tomber de 625 maniéres sans as; il y a donc 671 maniéres dont ils peuvent tomber avec un ou plusieurs as; ainsi celui qui fait ce pari a l'avantage en raison de 671 à 625.

10. QUESTION.

Il y a deux enclos qui ont la même circonférence, c'est-à-dire, qui sont fermés de murs d'égale longueur; mais l'un est un quarré exact dont chaque côté est de 125 pieds & l'autre est un quarré oblong de 124 pieds de large & de 126 de long; on demande lequel est le plus grand des deux, c'est-à-dire, lequel produira le plus d'herbe, toutes choses égales.

Réponse. Le quarré exact: car il contient 15625 pieds quarrés; & l'autre n'en contient que 15624.

Questions pour s'exercer à la Division.

Le but de la Division est de faire voir combien de fois un nombre, qu'on nomme le Diviseur, est contenu dans un autre, qu'on nomme le Dividende; & le nombre qui exprime ce combien de fois, est appellé le Quotient. Delà, & de la Définition de la Multiplication, donnée cidessus, il suit 1. que le Diviseur multiplié par le Quotient, & par consequent le Quotient multiplié par le Diviseur, est toujours égal au Dividende, pourvu qu'il n'y ait aucun reste après la Division faite; mais s'il y en a, ce reste ajoûté au produit donnera exactement le Dividende;
&

* Cette solution est fondée sur ce qu'un dé a six faces, dont chacune répond aux six faces d'un autre dé, si on en jette deux; donc pour deux dés le nombre des maniéres différentes de tomber est 36: si l'on ajoûtoit un troisiéme dé, on auroit le produit de 6 par 36, c'est-à-dire 216, & en ajoûtant un quatriéme dé, le produit de 6 par 216, savoir 1296.

& c'eſt la meilleure preuve de la Diviſion. 2. Comme le Diviſeur eſt une partie du Dividende, telle qu'elle eſt exprimée par le Quotient, de même le Quotient eſt une partie du Dividende, telle qu'elle eſt exprimée par le Diviſeur: ainſi 12 diviſés par 3 donnent 4; donc 3 eſt la quatriéme partie, & 4 eſt la troiſiéme partie de 12. 3. D'où il ſuit qu'on peut trouver un nombre qui ſera diviſible ſans reſte, par deux nombres donnés quelconques, ſavoir, en multipliant les deux nombres donnés l'un par l'autre. Ainſi, ſi je veux avoir un nombre diviſible ſans reſte par 6 & 9, je multiplie 9 par 6, & le produit, qui eſt 54, aura les conditions que je demande; cependant 18 eſt le plus petit nombre qui les ait. 4. La Multiplication & la Diviſion par le même nombre, ſont le contraire l'une de l'autre, & doivent néceſſairement avoir des effets contraires; car la Multiplication augmente un nombre, en le répétant autant de fois qu'il eſt exprimé par le Multiplicateur, & la Diviſion au contraire, le diminue, en n'en prenant qu'une partie, telle que l'exprime le Diviſeur. 5. Ainſi, ſi un nombre d'une plus petite dénomination doit être changé en un nombre équivalent d'une plus grande dénomination, comme des liards en ſous, des ſous en ſchellings &c., cela doit ſe faire par la Diviſion, & le contraire doit ſe faire par la Multiplication. 6. Toutes les fois qu'on ſe propoſe de ſavoir combien de fois une quantité de quelque eſpéce qu'elle ſoit, eſt contenue dans une quantité de même eſpéce, les nombres qui repréſentent ces quantités doivent être réduits à la même dénomination, avant que la Diviſion puiſſe ſe faire. Ainſi, ſi je veux ſavoir combien de piéces de treize ſous & demi il y a dans 20 ſchellings, je dois reduire non ſeulement la piéce de treize ſous & demi en 27 demi-ſous, mais auſſi les 20 ſchellings en 480 demi-ſous, & puis déterminer à l'aide de la diviſion combien de fois 27 demi-ſous ſont contenus en 480 demi-ſous, c'eſt-à-dire, combien de fois 27 ſont contenus dans 480; le Quotient eſt 17, & le reſte 21, c'eſt-à-dire 21 demi-ſous: car en toute Diviſion, le reſte eſt de même Dénomination que le Dividende, dont il étoit partie; ainſi dans 20 ſchellings il y a dix-ſept piéces de treize ſous & demi, & de plus 10 ſous & demi.

11. QUESTION.

On veut réduire 987654321 liards en Livres ſt., ſchellings & ſous.

Réponſe. 987654321 liards valent 246913580 ſous & 1 liard; ou 20576131 ſchellings, 8 ſous & 1 liard; ou 1028806 Livres ſter. 11 ſchellings, 8 ſous & 1 liard.

12. QUESTION.

On m'a preté 1296 guinées, dans le tems qu'elles valoient 1 livre, 1 schelling & 6 sous pièce : combien dois-je en rendre à présent qu'elles sont à 1 livre & 1 schelling?

Réponse. 1326 guinées, 18 schellings.

13. QUESTION.

On est convenu pour la façon d'un plancher de 24 pieds & 4 pouces de large, & de 96 pieds 6 pouces de long, à raison de 12 sous le pied quarré: je demande à quoi le plancher reviendra.

Réponse. Le plancher contient 338136 pouces quarrés, ou 2348 pieds quarrés & 24 pouces quarrés; ainsi le tout reviendra à 117 livres sterl. 8 schellings & deux sous.

14. QUESTION.

Certain rafraichissoir est de 36 pouces de profondeur, de 42 pouces de largeur, & de 72 pouces de longueur: je demande combien il peut contenir de gallons, mesure d'Angleterre.

N. B. Le gallon, mesure d'Angleterre, est de 282 pouces cubiques.

Réponse. Le rafraichissoir contient 108864 pouces cubiques, c'est-à-dire, 386 gallons & 12 pouces cubiques.

15. QUESTION.

Un pied cubique d'Eau pése 76 livres, poids de Troyes où poids Romain; & l'Air est 860 fois plus leger que l'Eau : je demande combien pése un pied cubique d'Air.

N. B. La livre de Troyes contient douze onces, l'once vingt deniers, & le denier vingt-quatre grains.

Réponse. Un pied cubique d'Air pése 1 once, 1 denier, 5 grains.

16. QUESTION.

Le tems moyen d'une Lunaison, c'est-à-dire, le tems qui s'écoule depuis une nouvelle Lune jusqu'à la nouvelle Lune suivante, est de 29 jours, 12 heures, 44 minutes & 3 secondes; & dans une année Julienne il y a 365 jours & 6 heures : je demande combien il y a de Lunaisons dans 19 années Juliennes.

Ré-



Réponse. Heures dans une Lunaison 708
Minutes 42524
Secondes 2551443
Heures en 19 années Juliennes 166554
Minutes 9993240
Secondes 599594400
Lunaisons 235; & 1 heure, 28′, 15″.

17. QUESTION.

En combien de tems peut-on faire sonner les douze Cloches d'un Carillon, en tous les différens ordres possibles, en supposant pour chaque ordre 3 secondes de tems? Voyez la 7. Question.

Réponse. Le nombre des ordres des 12 cloches 479001600
Le tems est 1437004800 en secondes
ou 23950080 en minutes
ou 399168 en heures
ou 45 ans, 27 semaines, 6 jours 18 heures.

18. QUESTION.

Un Général distribue 15 livres sterl. 19 schellings, & 2 sous & demi, à 4 Capitaines, 5 Lieutenans & 60 Soldats, dans la proportion suivante: Un Capitaine doit avoir trois fois autant qu'un Lieutenant, & chaque Lieutenant deux fois autant qu'un Soldat: je demande ce que chacun d'eux a eu.

Réponse. Chaque Soldat 3 schell. 4 sous $\frac{3}{4}$
Chaque Lieutenant 6 schell. 9 sous $\frac{1}{2}$
Chaque Capitaine 1 Liv. sterl. 4 sous $\frac{1}{2}$

Questions pour s'exercer à la Régle de Trois.

Et premiérement à la Régle de Trois directe.

La Régle de proportion, ou la Régle de trois, ou comme d'autres la nomment, la Régle d'or, est celle qui enseigne, trois nombres étant donnés, à trouver un quatriéme nombre qui y soit proportionel; c'est-à-dire à trouver un quatriéme nombre, qui soit à l'un des trois donnés dans la même proportion qui est exprimée par les deux autres: ainsi lorsqu'une question est proposée, par laquelle on cherche un tel quatriéme nombre proportionel, cette question appartient à la Régle de proportion. Or dans les questions de cette nature, surtout quand les nombres donnés ne sont pas de purs nombres abstraits, mais qu'ils sont appliqués

pliqués à des quantités particuliéres, il y a ordinairement trois choſes requiſes, la préparation, la diſpoſition, & l'opération.

Premiérement pour la préparation, il faut obſerver que des trois nombres donnés dans la queſtion, deux doivent toujours être de même eſpéce, & qu'il faut les réduire à la même dénomination, s'il ne le ſont pas déja: & ſi le nombre reſtant eſt d'une dénomination compoſée, il doit être réduit à une dénomination ſimple.

Secondement, en diſpoſant les nombres ainſi préparés, les deux nombres de la même dénomination doivent être placés le premier & le troiſiéme dans la Régle de proportion, & par conſéquent le nombre reſtant doit être le ſecond. Mais il faut particuliérement faire attention à ce que des deux nombres de même dénomination, celui qui doit être le troiſiéme dans la Régle de proportion, ſoit celui ſur lequel la queſtion roule proprement, ou qui contient la demande; & ce nombre étant placé, les deux autres prennent leurs places, comme je viens de le dire. Cette diſpoſition des trois nombres eſt proprement ce qu'on appelle poſer l'état de la Queſtion.

Enfin, ayant ainſi poſé la queſtion, multipliez le ſecond nombre & le troiſiéme l'un par l'autre, diviſez le produit par le premier, & le quotient qui en réſultera ſera le quatriéme nombre cherché, lequel quatriéme nombre, auſſi bien que le reſte, s'il y en a, doit toujours être conſidéré comme étant de même dénomination que le ſecond nombre. Comme par exemple,

19. QUESTION.

Une piéce de Vaiſſelle d'argent, peſant 3 livres, 4 onces & 5 deniers poids de Troyes, eſt eſtimée à 5 ſchellings & 6 ſous l'once, qu'elle eſt la valeur du tout?

Nous avons trois quantités dans cette Queſtion, ſavoir, 3 livres, 4 onces & 5 deniers; une once, & 5 ſchellings & 6 ſous: dont les deux premiéres, qui ſont de même eſpéce, doivent être réduites à la même dénomination, & la troiſiéme à une dénomination ſimple; ainſi pour une once j'écris 20 deniers; pour 3 livres, 4 onces & 5 deniers, j'écris 805 deniers; & pour 5 ſchellings & ſix ſous, j'écris 66 ſous; après quoi les trois nombres ſont préparés comme ils doivent l'être. Enſuite, je cherche ſur lequel des deux nombres 20 & 805, qui ſont de même dénomination, tombe proprement la Queſtion, & je trouve que c'eſt 805; car il eſt ici Queſtion de ſavoir qu'elle eſt la valeur de 805 deniers de Vaiſſelle; les deux autres nombres ne ſont donnés que pour me met-

mettre en état de trouver la réponse: ainsi je fais de 805 mon troisiéme nombre, 20 qui est de même dénomination sera le premier, 66 le second, & la question se trouvera posée de cette maniére, *si 20 deniers d'argent valent 66 sous, combien valent 805 deniers d'argent?* A l'égard de l'Opération elle se fait ainsi; je multiplie 805 par 66, & le produit est 53130, que je divise par le premier nombre 20, & le quotient est 2656, avec 10 de reste, c'est-à-dire 10 sous; pour rendre mon quotient plus complet, je change ces 10 sous en 40 liards, que je divise encore par 20, & je trouve 2 pour quotient, c'est-à-dire 2 liards sans aucun reste; ainsi la valeur cherchée est 2656 sous & 2 liards; qui font 11 livres, 1 schelling & quatre sous & demi.

Démonstration de cette Pratique.

1. *Cas.* Pour démontrer que cette opération est juste, je reprendrai la Question précédente, mais premiérement dans une autre supposition, en cette maniére, *si un denier de Vaisselle coute 66 sous, combien couteront 805 deniers de même Vaisselle?* Personne ne peut douter que dans cette supposition 805 deniers ne coutassent 805 fois 66 sous, ou 66 fois 805, c'est-à-dire, 53130 sous: ainsi dans tous les cas de cette espéce, c'est-à-dire, où le premier nombre dans la Règle de proportion est l'unité, le quatriéme nombre se trouve en multipliant le second & le troisiéme l'un par l'autre.

2. *Cas.* A-présent supposons la Question comme elle a été d'abord proposée, savoir, *si 20 deniers de Vaisselle valent 66 sous, combien valent 805 deniers de même Vaisselle?* Dans cette supposition il est aisé de voir, que 1 denier de Vaisselle, & par conséquent les 805 deniers ne peuvent valoir que la vingtiéme partie de ce qu'ils valoient dans le 1er *Cas*; ainsi nous ne devons pas répondre que 805 deniers valent 53130 sous, mais la vingtiéme partie de cette somme, qui est 2656 sous & 2 liards: & comme cette maniére de raisonner auroit lieu dans tout autre cas, il suit que *dans la Régle de proportion, quels que soient les nombres donnés, le quatriéme nombre se trouve, en multipliant le second & le troisiéme l'un par l'autre, & en divisant ce produit par le premier.* C. Q. F. D.

20. QUESTION.

Combien de chemin pourroit faire en 7 jours & 8 heures, un Voyageur qui feroit 13 milles en 4 heures, & qui marcheroit 12 heures par jour?

Réponse. 299 *milles.*

21. QUESTION.

A combien reviendroit un mur dont l'enclos seroit de 1296 aunes, à raison de 4 schellings, 5 sous la verge, la verge étant de 5 ½ aunes?

Réponse. 52 livres st., 8 sous & 3 liards.

22. QUESTION.

Dans la Monnoie d'Angleterre une livre d'or, c'est-à-dire, 11 onces d'or fin & 1 once d'alliage, donnent 44 guinées & demi: je demande le prix d'une livre d'or pur, en supposant l'alliage compté pour rien.

Réponse. 50 livres, 19 schellings, & 5 sous & ½.

23. QUESTION.

Quel est l'intérêt d'une année pour 987 livres st. 6 schellings & 5 sous, sur le pied de 6 pour cent?

Réponse. 59 livres st., 4 schellings, & 9 sous & ½.

24. QUESTION.

*La circonférence du Globe terrestre, suivant la mesure des Académiciens François, est de 123249600 pieds de Roi: je demande combien cela fait de milles d'*Angleterre.

N. B. Mille pieds de Roi sont égaux à 1068 pieds, mesure d'Angleterre; trois de ces pieds font une verge, & 1760 verges font un mille.

Réponse. 131630573 pieds mesure d'*Angleterre.*
ou 43876857 verges & deux pieds.
ou 24930 milles, 57 verges & 2 pieds.

25. QUESTION.

Supposant tout comme dans la précédente question, je demande en combien de tems le son passeroit d'un pole à l'autre pole, dans la supposition que le son parcourt 1142 pieds dans une seconde.

Réponse. En 16 heures & 32 secondes.

26. QUESTION.

*Mr. Huyghens a trouvé que le Pendule qui fait une vibration en une seconde, est à Paris de 3 pieds, 8 lignes & ½, je demande quelle est sa longueur, mesure d'*Angleterre.

N. B. Une ligne est $\frac{1}{12}$ partie d'une pouce, & 1000 demi lignes mesure de *France* valent 1068 demi lignes mesure d'*Angleterre*, comme dans la 24ème question.

Réponse. La longueur d'un pendule à secondes mesure d'*Angleterre*, est de 941½ lignes mesure d'*Angleterre*, ou de 39 pouces, 2 lignes & ½.

27. QUESTION.

Je demande en combien de tems un tuyau, qui donne 15 pintes d'eau en 2 minutes & 34 secondes, remplira une citerne de 36 pouces de profondeur, 42 de large & 72 de long. (Voyez la 14éme Question.)

Réponse. En 31707 secondes; ou 8 heures, 48′ 27″.

N. B. Huit pintes font un Gallon. Un cube d'un pouce vaut 8 cubes d'un demi-pouce de côté. Une pinte contient 282 cubes d'un demi-pouce, & 15 pintes 4230; mais la citerne contient 108864 cubes d'un pouce, qui valent 870912 cubes d'un demi-pouce, ainsi la Question doit être posée ainsi.

Si 4230 *cubes d'un demi-pouce coulent en* 154 *secondes, dans combien de tems couleront* 870912 *cubes d'un demi-pouce?*

Réponse. En 8 heures, 48′, 27″ comme ci-dessus.

28. QUESTION.

Une muraille de 6 pieds d'épaisseur, de 9 pieds de hauteur, & de 432 pieds de longueur, coute 720 livres st. à combien reviendra une muraille de même façon, qui aura 12 pieds d'épaisseur 18 pieds de baut & 576 pieds de long?

La premiére muraille contenoit 23328 pieds cubiques, & la seconde 124416: ainsi la réponse à la question proposée est 3840 livres st.

29. QUESTION.

Un Clocher jette sur un terrain égal une ombre à 57 verges, dans le tems qu'un bâton de 4 pieds, élevé perpendiculairement, jette une ombre de 5 pieds 6 pouces: quelle est la hauteur du Clocher?

Réponse. 41 verges, 1 pied, 4 pouces.

 30. QUES-



30. Question.

Deux personnes, A & B, font une Societé; A y met 372 livres st. & B 496 livres st. pour le même tems; ils gagnent 114 livres, 2 schellings: je demande la part du gain de chacun?

Le fond qu'ils mettent ensemble est de 868 livres; dites donc: si 868 livres de fond donnent 114 livres 2 schellings, combien donneront 372, qui est la part du fond de *A*. *Réponse*, 48 livres, 18 schellings pour la portion du gain de *A*. Cette somme étant retranchée de tout le gain, le reste sera la portion de *B*.

N. B. Quelque nombre d'Associés qu'il y eût, leurs parts du gain pourroient se trouver par une règle de proportion pour chacun, excepté celle du dernier qu'il y auroit moyen de déterminer par une simple soustraction. Il vaut pourtant mieux les trouver toutes par la règle de proportion, parce qu'en ajoûtant toutes les parts ensemble, on voit si elles font la somme totale du gain, & cela sert de preuve que l'opération entiére a été bien faite.

31. Question.

Deux Négocians, A & B, forment une Societé; A met 496 livres st. pour 2 mois, & B 620 livres pour 3 mois, leur gain est 456 livres. Quelle est la part de chacun?

Pour répondre à cette Question, il faut considérer qu'il en est en fait de Commerce, comme quand on place de l'argent à intérêt, où le tems vaut tout comme l'argent; desorte que celui qui avance 496 livres pour deux mois, a le même droit au gain, que celui qui avance le double de la somme, c'est-à-dire 992 livres pour un mois: de même celui qui avance 620 livres pour 3 mois, a le même droit au gain, que s'il avoit avancé trois fois cette somme, c'est-à-dire 1860 livres pour un mois: substituez donc ces deux suppositions au-lieu de celles qui sont dans la Question, ce qui peut se faire sans rien changer à la conclusion: la Question alors deviendra plus simple, & n'exigera plus qu'on fasse attention aux différences de tems.

Deux Négocians, A & B, forment une Societé; A y met 992 livres st. B 1860 livres st. pour le même tems; & ils gagnent 456 livres st. Quelle est la part du gain de chacun?

Réponse. La part de *A* sera de 158 livres st. 12 schellings & 2 sous; & celle de *B* de 297 livres st. 7 schellings & 10 sous.

32. QUESTION.

Si deux hommes gagnent en trois jours 4 ſchellings, combien gagneront 5 hommes en 6 jours?

Cette queſtion & la ſuivante appartiennent à la Règle de trois double, dans laquelle il ſe trouve cinq nombres: ces nombres doivent toujours être placés, comme ils le ſont dans cet exemple, les deux derniers nombres toujours être de la même dénomination que les deux premiers reſpectivement, & le nombre cherché être pareillement de même dénomination que celui du milieu; alors la queſtion pourra ſe réduire à une Règle de trois ſimple, & cela en deux maniéres; ſavoir en faiſant diſparoître le premier & le quatriéme nombre, ou bien le ſecond & le cinquiéme. Si vous voulez faire diſparoître le premier & le quatriéme nombre, vous devez raiſonner ainſi: deux hommes gagnent autant en trois jours, qu'un homme fait en deux fois trois jours, c'eſt-à-dire, en ſix jours: de-même cinq hommes gagnent autant en ſix jours qu'un homme gagne en trente jours; ſubſtituez cette ſuppoſition & cette demande, au-lieu de celles qui ſont dans la Queſtion, & vous aurez, ſi un homme en ſix jours gagne 4 ſchellings, combien gagnera un homme en 30 jours? Ce qui revient à ceci, *ſi en 6 jours un homme gagne 4 ſchellings, combien gagnera-t-il en 30 jours?*

Réponſe. 20 ſchellings.

Si vous vouliez faire diſparoître le ſecond nombre & le cinquiéme, il faudroit raiſonner ainſi: deux hommes gagnent autant en trois jours que 3 fois deux hommes, c'eſt-à-dire 6 hommes, en un jour: de-même cinq hommes gagnent autant en 6 jours, que 30 hommes en un jour; poſez la queſtion de cette maniére & dites: ſi ſix hommes en un jour gagnent 4 ſchellings, combien gagneront en un jour 30 hommes? C'eſt-à-dire, *ſi dans un certain tems 6 hommes gagnent 4 ſchellings, combien gagneront 30 hommes dans le même tems?*

Réponſe. 20 ſchellings, comme ci-deſſus.

Quiconque fera attention à ces deux maniéres de faire diſparoître les quantités qui pourroient embarraſſer, ſera aiſément conduit à une troiſiéme, qui renferme les deux autres, & qui vaut mieux dans la pratique; car à la fin de ces deux opérations, le nombre cherché eſt trouvé en multipliant 30 par 4, & en diviſant le produit par 6: or ſi on fait

attention à la maniére dont se forment ces nombres, on trouvera que 30 vient de la multiplication des deux derniers nombres 5 & 6, que 4 est le nombre du milieu dans la Question, & que le Diviseur 6 est le produit des deux premiers nombres 2 & 3, multipliés l'un par l'autre: Ainsi dans toutes les Questions de cette nature, *si les trois derniers nombres sont multipliés l'un par l'autre, & que le produit soit divisé par le produit des deux premiers nombres, le quotient sera le nombre cherché.*

33. QUESTION.

Si pour charrier un poids de 300 livres, à la distance de 40 milles, je dois payer 7 schellings & six sous, combien dois-je payer pour charrier un poids de 500 livres à la distance de 60 milles?

Réponse. 225 sous, ou 18 schellings & 9 sous.

Question pour la Règle de trois Inverse.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que de la Règle de trois directe; mais il y a une autre Règle de proportion nommée la Règle de trois inverse, qui ne différe point de la Règle de trois directe, à l'égard de la préparation, & de la disposition des nombres, mais qui en est différente dans l'opération; car dans la premiére le quatriéme nombre se trouve, en multipliant le second nombre & le troisiéme l'un par l'autre, & en divisant le produit par le premier nombre; mais dans celle-ci, il se trouve en multipliant le premier nombre, & le second l'un par l'autre, & en divisant le produit par le troisiéme. Il ne s'agit donc plus que de savoir distinguer, si une Question appartient à l'une ou à l'autre de ces Règles; pour cet effet, observez la règle suivante: *Si plus demande plus, ou si moins demande moins, suivez la Règle de trois directe: mais si plus demande moins, ou si moins demande plus, suivez la Règle de trois inverse.* Le sens de cette règle est, que lorsque le troisiéme nombre étant plus grand que le premier, le quatriéme doit être proportionnellement plus grand que le second; ou que le troisiéme nombre étant plus petit que le premier, le quatriéme doit être proportionnellement plus petit que le second, la Question appartient à la Règle de trois directe; mais lorsque le troisiéme nombre étant plus grand que le premier, le quatriéme doit être plus petit que le second; ou le troisiéme étant plus petit que le premier, le quatriéme doit être plus grand que le second; dans ces deux derniers cas, la Question appartient à la Règle de trois inverse, & doit être résolue, comme je viens de le dire. Par exemple.

34. QUES-

34. QUESTION.

Si 12 hommes mangent une certaine quantité de provision en 15 jours, combien de tems feront 20 hommes à manger la même provision?

Cette Question est de telle nature que plus demande moins: car 20 hommes consumeront la même provision en moins de tems que 12: ainsi cette Question appartient à la Règle de trois Inverse; cela étant je multiplie le premier & le second nombre l'un par l'autre, je divise le produit par le troisiéme, & le quotient 9, c'est-à-dire, 9 jours, est la Réponse à la Question.

Démonstration de la Règle de trois Inverse.

Si je devois répondre à cette question par pure réflexion & sans le secours d'aucune Règle pour me diriger, je raisonnerois ainsi: la même quantité de provision qui suffiroit pour 12 hommes pendant 15 jours, suffiroit pour un homme pendant douze fois le même tems, ce qui donne 12 fois 15, ou 180 jours. Mais si la même quantité suffisoit pour un homme 180 jours, elle ne suffiroit pour 20 hommes que la 20. partie de ce tems, c'est-à-dire, pour 9 jours: le quatriéme nombre se trouve donc ici en multipliant le premier & le second l'un par l'autre, & en divisant le produit par le troisiéme: & ce raisonnement est applicable à tous les cas qui appartiennent à la Règle de trois inverse. C. Q. F. D.

35. QUESTION.

Quelqu'un m'a prêté 372 livres pour 7 ans & 8 mois, pour combien de tems faut-il que je lui prête 496 livres, comme équivalent?

Réponse. Pour 5 ans & 9 mois.

36. QUESTION.

Si un tuyau quarré, de 4 pouces & 5 lignes de côté, vuide une certaine quantité d'eau en une heure de tems; dans combien de tems un tuyau quarré d'un pouce & deux lignes de côté vuidera-t-il la même quantité d'eau?

L'orifice d'un tuyau quarré, de 4 pouces & 5 lignes de côté, c'est-à-dire de 53 lignes, contient 2809 lignes quarrées; & l'orifice d'un tuyau quarré de 1 pouce, 2 lignes, ou 14 lignes de côté, contient 196 lignes quarrées. Dites donc, *si un orifice de 2809 lignes quarrées vuide une certaine quantité d'eau en une heure, en combien de tems un orifice de 196 lignes quarrées vuidera-t-il la même quantité?*

Réponse. En 14 heures, 19' 54''.

37. QUES-

37. Question.

Si trois hommes, ou quatre femmes, peuvent faire un certain Ouvrage en 56 jours, en combien de tems un homme & une femme en viendront-ils à bout?

Comme il ſe trouve ici 3 hommes ou 4 femmes, il faut trouver un nombre diviſible par ces deux-là ſans reſte, ce nombre eſt 12, produit de 3 par 4 (Voyez la troiſiéme obſervation ſur la définition de la Diviſion:) conſidérez donc 3 hommes ou 4 femmes comme équivalens à 12 jeunes garçons, & vous aurez un homme équivalent à 4 garçons, & une femme à 3, & un homme & une femme à 7 garçons, & la Queſtion reviendra à celle-ci; *ſi 12 garçons font un Ouvrage en 56 jours, combien de jours 7 garçons mettront-ils à faire le même Ouvrage?*

Réponſe. 96 jours.

38. Question.

Si 5 bœufs, ou 7 poulains, mangent un tas de foin en 87 jours, en combien de tems 2 bœufs & 3 poulains le mangeront-ils?

Réponſe. En 105 jours.

39. Question.

Si deux acres de pré peuvent nourrir 3 chevaux pendant 4 jours, combien de tems 5 acres nourriront-ils 6 chevaux?

Cette Queſtion, à la premiére vue, paroîtra de même nature que la 32. & la 33. qui appartiennent à la Règle de trois directe; mais quand on y fait attention, on trouve qu'elle eſt de toute autre nature; car nous ne pouvons pas dire ici, comme dans les deux autres cas, que 2 acres nourriront 3 chevaux, auſſi longtems qu'un acre nourrira 6 chevaux; ce ſeroit une maniére de raiſonner abſurde; & dès que la choſe eſt ainſi, la queſtion doit être traitée ſuivant une autre Règle, qui s'appelle la double Règle de trois inverſe: la juſteſſe ou l'abſurdité de cette maniére de raiſonner, étant un caractére infaillible pour décider ſi la Queſtion appartient à l'une ou à l'autre de ces Règles. Toutes les Queſtions qui appartiennent à cette Règle, de même que celles qui appartiennent à l'autre, peuvent ſe réduire à une ſimple Règle de trois, de deux maniéres; en faiſant diſparoître le premier & le quatriéme nombre, ou bien le ſecond & le cinquiéme: mais la méthode de les faire diſpa-

disparoître est différente. Dans les Questions de cette nature, si le premier nombre & le quatriéme doivent disparoître, les deux premiers nombres doivent être multipliés par le quatriéme, & les deux derniers par le premier; mais si le second nombre & le cinquiéme doivent disparoître, les deux premiers nombres doivent être multipliés par le cinquiéme, & les deux derniers par le second: ainsi dans la Question proposée, si nous voulons faire disparoître le premier nombre & le quatriéme, nous devons multiplier les deux premiers nombres, 2 & 3, par le quatriéme qui est 5, & dire, que 2 acres nourriront 3 chevaux, aussi longtems que 10 acres nourriront 15 chevaux; nous devons aussi multiplier les deux derniers nombres 5 & 6, par le premier 2, & dire, que 5 acres nourriront 6 chevaux aussi longtems que 10 acres nourriront 12 chevaux: prenez ces nombres au-lieu de ceux qui sont dans la Question proposée, & elle sera changée en cette autre Question équivalente, si 10 acres nourrissent 15 chevaux pendant 4 jours, combien de tems 10 acres nourriront-ils 12 chevaux? Effacez de cette Question le premier nombre & le quatriéme, qui étant égaux ne servent plus à la conclusion, & vous aurez la Question suivante: *Si 15 chevaux mangent l'herbe d'une certaine piéce de terre en 4 jours, combien de tems seront 12 chevaux à manger la même quantité d'herbe?*

Réponse. 5 jours: car cette Question appartient à la Règle de trois inverse.

Si nous voulons exterminer le second, & le cinquiéme des nombres de la Question, nous devons multiplier les deux premiers nombres par le cinquiéme, & dire, que 2 acres nourriront 3 chevaux, aussi longtems que 12 acres nourriront 18 chevaux; nous devons de même multiplier les deux derniers nombres par le second, & dire, que 5 acres nourriront 6 chevaux, aussi longtems que 15 acres en nourriront 18: prenez ces nombres au-lieu de ceux de la Question proposée, & elle sera changée en celle-ci équivalente: si 12 acres nourrissent 18 chevaux 4 jours, combien de tems 15 acres nourriront-ils 18 chevaux? C'est-à-dire (en retranchant le second nombre & le cinquiéme). *Si 12 acres nourrissent un certain nombre de chevaux pendant 4 jours, combien de tems 15 acres nourriront-ils le même nombre?*

Réponse. 5 jours, comme ci-dessus; car cette Question appartient à la Règle de trois directe.

Dans ces deux opérations le nombre cherché est trouvé enfin en mul-

multipliant 15 par 4, & en divisant le produit par 12: à-présent en repassant la solution précédente, & en considérant comment ces nombres ont été formés, on verra facilement, que le nombre 4 est le terme du milieu de la Question; que le nombre 15 dans les deux opérations est le produit des nombres 3 & 5, qui étoient les termes voisins de ce terme du milieu, de l'un & de l'autre côté; & que le Diviseur 12 est dans les deux cas le produit des nombres extrêmes 2 & 6: *Ainsi, dans toutes les Questions qui appartiennent à la double Règle de trois inverse, où les nombres sont supposés rangés comme dans la double Règle de trois directe, si les trois nombres du milieu sont multipliés l'un par l'autre, & le produit divisé par le produit des deux extrêmes, le quotient de cette division sera le nombre cherché.* Par ce moyen l'embarras de faire disparoître des termes peut être évité; mais j'ai jugé à propos d'expliquer d'abord cette méthode, pour faire comprendre aux commençans la raison sur laquelle le Théorême est fondé.

Questions qui regardent l'extraction des Racines quarrées.

40. QUESTION.

Un champ est large de 576 verges & long de 1296 verges. Je demande le côté d'un Quarré égal à ce champ.

Réponse. Ce côté sera de 864 verges.

41. QUESTION.

L'enclos d'un champ est trois fois plus long qu'il n'est large, & le champ est de 46128 verges quarrées: je demande quelle est la longueur & la largeur de l'enclos.

La largeur multipliée par la longueur, c'est-à-dire, la largeur multipliée trois fois par elle-même, est 46128; donc la largeur multipliée par elle-même est 15376; donc la largeur est 124, & la longueur 372.

42. QUESTION.

Une Société a mis ensemble la somme de 15 livres st. 5 schellings & 1 liard, chaque membre contribuant autant de liards qu'il y a de membres dans la Société, je demande le nombre des membres.

Réponse. 121 membres.

IN-

INTRODUCTION
A LA
DOCTRINE DES FRACTIONS VULGAIRES
ET DES
FRACTIONS DECIMALES.

DEFINITIONS.

Art. I. Une Fraction considérée simplement & abstraitement, est l'expression d'une partie ou de plusieurs parties d'une Unité : comme si une Unité est supposée divisée en 4 parties égales, & que trois de ces parties doivent être exprimées, cela se fait par la Fraction trois quatriémes, & s'écrit ainsi $\frac{3}{4}$: où le nombre 4, qui marque en combien de parties égales l'Unité est supposée divisée, & qui détermine la vraye valeur, grandeur, ou dénomination de ces parties, s'appelle le Dénominateur de la Fraction, & le nombre 3, qui marque combien de ces parties sont considérées dans la Fraction, le Numérateur: ainsi dans la Fraction $\frac{1}{2}$ ou un demi, 1 est le Numérateur, & 2 le Dénominateur; dans $\frac{2}{2}$ ou deux demis, 2 est le Numérateur & le Dénominateur, &c.

Quand une Fraction est appliquée à quelque quantité particuliére, cette quantité est nommée l'Entier de la Fraction. Ainsi dans $\frac{3}{4}$ d'un sou, un sou est l'Entier; dans trois quarts de six le nombre 6 est l'Entier; de même dans trois quarts de cinq sixiémes, la Fraction cinq sixiémes est l'Entier; car quoique dans un sens absolu ce soit une Fraction, cependant à l'égard de la Fraction trois quarts, c'est un Entier: la même quantité, suivant qu'on la considére, pouvant être un Entier ou une Fraction; ainsi un pied est un Entier, & la troisiéme partie d'une verge est une Fraction, quoique ce soit une seule & même chose. Lorsque l'Entier d'une Fraction n'est pas exprimé, on sousentend toujours que c'est l'Unité: ainsi $\frac{3}{4}$ sont $\frac{3}{4}$ de l'Unité; pareillement lorsque nous disons que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ font $\frac{7}{12}$, nous entendons que si $\frac{1}{3}$ partie de l'Unité, & $\frac{1}{4}$ partie de l'Unité sont ajoutées l'une à l'autre, la somme sera la même, que si l'Unité avoit été divisée en 12 parties égales, & qu'on eût pris 7 de ces parties; de même encore, quand nous disons que $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{7}$ sont équivalens à $\frac{15}{28}$, le sens est

est, que si l'Unité est divisée en 5 parties égales, & qu'on prenne 4 de ces parties, & que cette Fraction $\frac{4}{5}$ soit encore divisée en 3 parties égales, & qu'on prenne 2 de ces parties, le résultat sera le même que si on avoit d'abord divisé l'Unité en 15 parties égales, & qu'on en eût pris 8; & ce qui est vrai quand il s'agit de l'Unité, sera vrai de même quelque quantité qu'on prenne pour l'Entier: ainsi s'il est vrai que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ de l'Unité sont égaux à $\frac{7}{12}$ de l'Unité, c'est-à-dire, s'il est vrai en général que $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ajoûtés ensemble sont égaux à $\frac{7}{12}$, il sera aussi vrai de quelque Entier que ce soit en particulier, par exemple, d'une livre sterling, que le $\frac{1}{3}$ d'une livre & le $\frac{1}{4}$ d'une livre, ajoûtés ensemble seront égaux à $\frac{7}{12}$ d'une livre; de même, s'il est vrai en général que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ sont égaux à $\frac{8}{15}$, il sera aussi vrai en particulier que $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ d'une livre seront équivalens à $\frac{8}{15}$ d'une livre, &c.

Des Fractions proprement & improprement ainsi nommées, & de la Réduction d'une Fraction improprement dite à un Entier ou à un Nombre entier avec une Fraction adhérente.

2. Il y a deux sortes de Fractions; les Fractions proprement dites, & celles qu'on désigne improprement par ce nom. Une Fraction proprement dite, est celle dont le Numérateur est moindre que le Dénominateur, comme $\frac{1}{2}$; & une Fraction improprement ainsi nommée celle dont le Numérateur est égal, ou plus grand que le Dénominateur, comme $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{2}$, &c.

OBJECTION.

Mais n'y a-t-il pas d'absurdité à supposer une Fraction impropre, de trois deuxiémes, par exemple, puisqu'une unité ne peut être divisée en plus de deux deuxiémes? *Réponse.* Il n'y a à cela pas plus d'absurdité qu'à supposer que trois demi sous sont le prix de quelque chose que ce soit, parce qu'un sou ne peut être divisé en plus de deux demi-sous. Ces Fractions sont appellées impropres, non pas à cause qu'il y a quelque absurdité dans la supposition, ou dans l'expression, mais parce qu'elles peuvent être plus proprement & plus intelligiblement exprimées, soit par un nombre entier, soit par un nombre mixte, composé d'un Entier & d'une Fraction; par exemple, si le Numérateur d'une Fraction est égal au Dénominateur, comme $\frac{4}{4}$, cette Fraction est toujours équivalente à l'unité; comme $\frac{4}{4}$ d'heure, ou quatre quarts-d'heure, sont égaux à une heure, $\frac{4}{4}$ de sou, ou quatre liards, sont égaux à un sou, &c. Et la raison

raiſon en eſt claire; car ſi une unité eſt diviſée en quatre parties égales, & que quatre de ces parties ſoient exprimées dans une Fraction, l'unité entiére eſt exprimée dans cette Fraction, c'eſt-à-dire, que cette Fraction peut toujours être conſidérée comme égale à l'unité: ainſi, ſi le Numérateur eſt double du Dénominateur, comme $\frac{8}{4}$, la Fraction eſt égale à 2, parce que $\frac{8}{4}$ contiennent $\frac{4}{4}$ ou 1 deux fois: de même $\frac{12}{4}$ ſont égaux à 3 & peuvent être exprimés par ce nombre; $\frac{16}{4}$ ſont égaux à 4, &c. & en général une Fraction eſt égale à l'unité priſe autant de fois que le Numérateur contient le Dénominateur: mais pour trouver combien de fois le Numérateur contient le Dénominateur, il faut diviſer le Numérateur par le Dénominateur; ainſi, ſi le Numérateur d'une Fraction improprement dite eſt diviſé par le Dénominateur, le quotient, s'il n'y a pas de reſte à la Diviſion, ſera le nombre entier par lequel la Fraction peut être exprimée: mais s'il y a un reſte à la Diviſion, le quotient avec une Fraction, dont le Numérateur eſt ce reſte, & le Dénominateur le Diviſeur, ſera un nombre mixte qui exprimera la Fraction propoſée: ainſi $\frac{24}{3}$ ſont équivalens au nombre entier 8; mais $\frac{25}{3}$ ſont équivalens au nombre mixte $8\frac{1}{3}$, $\frac{26}{3}$ au nombre mixte $8\frac{2}{3}$, comme 24 pieds ſont équivalens à 8 verges, 25 pieds à 8 verges & un pied, 26 pieds à 8 verges & 2 pieds &c. & c'eſt-là ce qu'on appelle la Réduction d'une Fraction à un nombre entier ou mixte.

La Réduction d'un nombre entier ou mixte à une Fraction improprement dite.

3. Comme l'unité peut être exprimée par une Fraction de quelque forme ou dénomination que ce ſoit, pourvu que le Numérateur ſoit égal au Dénominateur, comme $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$, &c. ainſi le nombre 2 eſt réductible en quelque Fraction que ce ſoit dont le Numérateur eſt double du Dénominateur, comme $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{8}{4}$, &c. & de même tout nombre eſt réductible en quelque Fraction que ce ſoit, dont le Numérateur contient le Dénominateur auſſi ſouvent que l'unité eſt contenue dans le nombre propoſé: de ſorte que toutes les fois qu'un nombre doit être réduit en une Fraction dont le Dénominateur eſt donné, ce nombre doit être multiplié par ce Dénominateur, & le produit avec ce Dénominateur mis deſſous, eſt la Fraction équivalente; ainſi, ſi le nombre 5 doit être réduit en demis ou deuxiémes, c'eſt-à-dire, en une Fraction dont le Dénominateur ſoit 2, il faut multiplier le nombre donné 5, par le Dénominateur donné 2, & l'on aura le nombre 5 égal à $\frac{10}{2}$, comme, par exemple, 5 ſous ſont égaux à 10 demi-ſous; ſi le nombre 8 doit être réduit en tiers ou troiſiémes, il faut

le multiplier par 3, & l'on aura 8 égal à $\frac{24}{3}$, comme 8 verges font égales à 24 pieds: enfin, si le nombre 2 doit être réduit en quatriémes, il deviendra égal à $\frac{8}{4}$, comme deux sous sont égaux à huit liards. Si le nombre à réduire est un nombre mixte, composé d'un Entier & d'une Fraction, le nombre entier doit toujours être réduit à la même dénomination que la Fraction annexe, & la Règle est telle: multipliez le nombre entier par le Dénominateur de la Fraction annexe, ajoûtez à ce produit le Numérateur, & cette somme avec le Dénominateur sous elle sera la Fraction équivalente: ainsi le nombre mixte $5\frac{1}{2}$ est équivalent à $\frac{11}{2}$, comme cinq sous & demi sont équivalens à onze demi-sous. Cette opération porte sa démonstration avec elle; car le nombre 5 est égal à $\frac{10}{2}$, comme nous venons de le voir; & partant $5\frac{1}{2}$ sont équivalens à $\frac{11}{2}$: de même le nombre $8\frac{2}{3}$, est égal à $\frac{26}{3}$, comme 8 verges & 2 pieds valent 26 pieds; enfin, $2\frac{3}{4}$ se peuvent réduire en $\frac{11}{4}$, comme 2 sous & 3 liards se peuvent réduire en 11 liards.

Lemme.

4. *Si on prend un Entier, tel qu'une livre sterling, & une Fraction comme $\frac{3}{4}$, je dis que $\frac{3}{4}$ d'une livre st. est la même chose que $\frac{1}{4}$ de 3 livres st.*

Si une quantité, grande ou petite, est toujours divisée dans le même nombre de parties, ces parties seront grandes ou petites, à proportion que la quantité divisée est grande ou petite: ainsi $\frac{1}{4}$ d'une verge est 3 fois aussi grand que $\frac{1}{4}$ d'un pied, puisqu'une verge est trois fois aussi grande qu'un pied; par la même raison $\frac{1}{4}$ de 3 livres st. est trois fois aussi grand que $\frac{1}{4}$ d'une livre st.; mais $\frac{3}{4}$ d'une livre st. sont aussi trois fois aussi grands que $\frac{1}{4}$ d'une livre st. ainsi $\frac{3}{4}$ d'une livre st. sont égaux à $\frac{1}{4}$ de 3 livres st.; car l'une & l'autre de ces sommes sont justement trois fois autant que $\frac{1}{4}$ d'une livre st. C. Q. F. D.

Maniére d'estimer quelque partie fractionelle que ce soit d'un Entier en parties de moindre dénomination, & réciproquement.

5. On peut faire cette opération de plusieurs maniéres, mais voici celle qui me paroît la plus commode. Supposé que je cherche la valeur de $\frac{5}{6}$ d'une livre st. je dirois, suivant le Lemme précédent, que $\frac{5}{6}$ d'une livre sont la même chose que $\frac{1}{6}$ de 5 livres; mais le second est plus facile que le premier: ainsi je m'attache au dernier, c'est-à-dire, à trouver la sixiéme partie de 5 livres, & voici comment: 5 livres, ou 100 schellings divisés par 6 donnent 16 schellings, & il reste 4 schellings; 4 schellings, ou

48 sous,

48 sous, divisés par 6 donnent 8 sous sans reste; ainsi un sixiéme de 5 livres, ou la fraction $\frac{5}{6}$ d'une livre, est 16 schellings & 8 sous. Si je cherchois la valeur de $\frac{6}{7}$ d'une livre, je trouverois la valeur de $\frac{1}{7}$ de 6 livres: ainsi 6 livres ou 120 schellings, divisés par 7, donnent 17 schellings, & il reste 1 schelling: or un schelling, ou le nombre 12, qui exprime combien il y a de sous dans un schelling, divisé par 7, donne 1 sou, & il reste 5 sous, ou 20 liards, qui divisés par 7, donnent deux liards, & il reste 6 liards; enfin la septiéme partie de 6 liards est, suivant le Lemme précédent, la même chose que $\frac{6}{7}$ d'un liard; d'où je conclus, que $\frac{6}{7}$ d'une livre st. valent 17 schellings, 1 sou, 2 liards, & $\frac{6}{7}$ de liard: mais $\frac{6}{7}$ d'un liard approchent de si près d'un liard, que si je préfére à la plus grande exactitude la commodité d'éviter une fraction, je dirai que $\frac{6}{7}$ d'une livre sont 17 schellings, 1 sou & 3 liards. Enfin, si je veux savoir la valeur de $\frac{2}{3}$ de 17 schellings & 6 sous, je dirai, $\frac{2}{3}$ de 17 schellings & 6 sous sont équivalens à $\frac{1}{3}$ de deux fois autant, qui est $\frac{1}{3}$ de 35 schellings: mais $\frac{1}{3}$ de 35 schellings est 11 schellings & 8 sous; donc $\frac{2}{3}$ de 17 schellings & 6 sous sont 11 schellings & 8 sous.

Un seul exemple suffira pour le contraire de cette réduction. S'il s'agit de réduire 1 schelling, 2 sous & 3 liards en parties fractionelles d'une livre, je considére que dans une livre il y a 960 liards, & que dans un schelling, 2 sous & 3 liards, il y a 59 liards; donc un liard est $\frac{1}{960}$ d'une livre, & 1 schelling, 2 sous & 3 liards sont $\frac{59}{960}$ d'une livre.

Préparations pour d'autres réductions & opérations sur les Fractions.

6. Toutes les opérations qu'on fait pour réduire des Fractions, peuvent se déduire médiatement ou immédiatement du principe suivant. *Si le Numérateur d'une Fraction croît, le Dénominateur restant le même, la valeur de la Fraction croît à proportion. D'autre part, si le Dénominateur croît en quelque proportion que ce soit, le Numérateur restant le même, la valeur de la Fraction diminuera proportionellement.* Ainsi $\frac{2}{3}$ sont deux fois autant que $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{6}$ en est seulement la moitié.

Il suit de ce principe, que si le Numérateur & le Dénominateur d'une Fraction sont multipliés ou divisés par le même nombre, la valeur de la Fraction n'en sera pas changée; parce qu'autant que la Fraction est augmentée par la multiplication du Numérateur, autant est-elle diminuée par la multiplication du Dénominateur; & autant que la Fraction est diminuée par la division du Numérateur, autant est-elle augmentée par la division du Dénominateur. Ainsi les termes de la Fraction $\frac{3}{4}$ étant doublés, donnent $\frac{6}{8}$, Fraction de même valeur que l'autre; & au contraire, les termes de la Fraction $\frac{6}{8}$ divisés par 2, donnent $\frac{3}{4}$.

Il

Il paroît par-là que toute Fraction eſt ſuſceptible d'une infinité d'expreſſions, puiſqu'on peut choiſir entre un nombre infini de Multiplicateurs, par leſquels le Numérateur & le Dénominateur de la Fraction peuvent être multipliés, & changer de cette maniére l'expreſſion de la Fraction, ſans que la valeur en ſoit changée. Ainſi la Fraction $\frac{1}{2}$, ſi le Numérateur & le Dénominateur ſont multipliés par 2, devient $\frac{2}{4}$; par 3, $\frac{3}{6}$; par 4, $\frac{4}{8}$, par 5, $\frac{5}{10}$, & ainſi à l'infini; & toutes ces expreſſions ſont également celles de la même Fraction: au milieu de cette variété, on ne peut s'attendre que chaque Fraction qu'on rencontre en ſon chemin, ſoit toujours réduite aux plus ſimples & aux moindres termes; mais l'article ſuivant enſeignera à les y réduire, quand elles ne le ſeront pas.

Réduction des Fractions aux plus ſimples termes.

7 Lorſque vous ſoupçonnez qu'une Fraction n'eſt pas réduite aux plus ſimples termes, trouvez, s'il eſt poſſible, quelque nombre qui diviſe ſans reſte le Numérateur & le Dénominateur de la Fraction; car ſi un tel nombre peut être trouvé, & que la diviſion ſoit faite, les deux quotiens qui en viendront, ſeront reſpectivement le Numérateur & le Dénominateur d'une Fraction égale à la Fraction propoſée, mais exprimée en termes plus ſimples, comme il eſt évident par l'article précédent. Par exemple, on propoſe la réduction de la Fraction $\frac{10}{15}$: pour trouver un nombre qui diviſe ſans reſte les nombres 10 & 15, je commence par le nombre 2, qui eſt le premier nombre entier qu'on puiſſe employer dans la Diviſion; mais je vois que le nombre 2 ne peut diviſer 15: 3, qui eſt le nombre ſuivant, ne peut ſervir non plus, car il ne diviſe pas 10; je paſſe le nombre 4, parce que 2 ne pouvant diviſer 15, 4 le peut bien moins encore: le nombre ſuivant eſt 5, & la diviſion réuſſit avec celui-ci; car ſi 10 & 15 ſont diviſés par 5, les quotiens reſpectifs ſeront 2 & 3, tous deux ſans reſte; ainſi la Fraction $\frac{10}{15}$, réduite au plus ſimple, ſe trouve équivalente à $\frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire, que ſi l'unité eſt diviſée en quinze parties égales, & qu'on prenne 10 de ces parties, la valeur en ſera égale à celle qu'on auroit ſi on avoit diviſé l'unité en 3 parties égales, & qu'on en eût pris 2. En ſecond lieu, ſi la Fraction à réduire eſt $\frac{2520}{7560}$, diviſez-en les termes par 2, & vous aurez la Fraction $\frac{1260}{3780}$; diviſez encore par 2, & vous aurez $\frac{630}{1890}$; diviſez encore par 2, & vous aurez $\frac{315}{945}$ & toute diviſion par 2 eſt finie: diviſez ces derniers termes par 3, & vous aurez $\frac{105}{315}$; diviſez encore par 3, & vous aurez $\frac{35}{105}$; diviſez par 5 & vous aurez $\frac{7}{21}$; & enfin

enfin divisez par 7, & vous aurez $\frac{1}{3}$; ainsi la Fraction $\frac{2520}{7560}$ après les divisions des deux termes par 2, 2, 2, 3, 3, 5, 7, se trouve égale à $\frac{1}{3}$. En troisiéme lieu, la Fraction $\frac{36}{48}$ après les divisions par 2, 2, 3, devient $\frac{3}{4}$. En quatriéme lieu, $\frac{56}{84}$ après les divisions par 2, 2, 7, deviennent $\frac{2}{3}$. En cinquiéme lieu, $\frac{144}{180}$, après les divisions par 2, 2, 3, 3, deviennent $\frac{4}{5}$. En sixiéme lieu, $\frac{42}{126}$, après les divisions par 2, 3, 7, deviennent $\frac{1}{3}$. En septiéme lieu, $\frac{315}{840}$, après les divisions par 3, 5, 7, deviennent $\frac{3}{8}$. En huitiéme lieu, $\frac{35}{840}$, après les divisions par 5, 7, deviennent $\frac{1}{24}$. En neuviéme lieu, $\frac{735}{245}$, après les divisions par 5, 7, 7, deviennent $\frac{3}{1}$, ou 3.

Voici quelques remarques qui pourront aider dans la pratique de cette règle.

1°. 2 divisent exactement tout nombre qui finit par un chiffre pair ou par un zéro, comme 36, 30, &c. mais aucun autre.

2°. 5 divisent tout nombre qui finit par 5, ou par zéro, comme 75, 70, &c. & point d'autre.

3°. 3 divisent tout nombre dont les chiffres qui l'expriment additionnés font une somme divisible par 3: ainsi ce nombre divise 471, parce qu'il divise 12, qui est la somme de 4, 7 & 1.

4°. Si le Numérateur & le Dénominateur finissent par des zéros, retranchez-en un nombre égal de l'un & de l'autre: ainsi $\frac{3500}{56000}$, est la même chose que $\frac{35}{560}$, ou $\frac{7}{112}$, ou $\frac{1}{16}$.

Enfin, il y a une règle infaillible pour trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres, qui en ont un; & par-là une Fraction peut être réduite au plus simple, par une seule opération. Cependant je me trouve obligé de renvoyer à une autre occasion la démonstration de cette règle, que voici: soit a & b les deux nombres donnés, dont on cherche le plus grand diviseur commun; a est le plus grand nombre & b le plus petit: divisez a par b, & sans vous embarrasser du quotient, appellez le reste c; divisez encore b par c, & appellez le reste d; divisez c par d, & appellez le reste e; divisez d par e & appellez le reste f, & continuez ainsi jusqu'à ce que vous veniez à un diviseur, comme f, qui divise le nombre précédent e sans reste; je dis que ce dernier diviseur est le plus grand diviseur commun des nombres donnés a & b. Par exemple, soit a 1344 & b 582: pour trouver le plus grand diviseur commun de ces deux nombres, je divise a (1344) par b (582) & il

 reste

reste 180, que j'appelle c ; je divise b (582) par c (180) & il reste 42, que j'appelle d; je divise c (180) par d (42) & il reste 12, que j'appelle e; je divise d (42) par e (12) & il reste 6, que j'appelle f; enfin je divise e (12) par f (6) & il ne reste rien : d'où je conclus que le nombre 6 est le plus grand diviseur commun de 1344 & 582; & comme les quotiens des divisions par 6, sont 224 & 97, il suit que la Fraction $\frac{582}{1344}$, réduite aux plus simples termes est $\frac{97}{224}$. Si on ne trouve pas d'autre diviseur commun que l'unité, c'est une preuve que la Fraction est toute réduite au plus simple.

De cet Article & du précédent il suit que toutes Fractions réductibles aux mêmes termes les plus simples sont égales, comme $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{10}{15}$, qui sont toutes réductibles à $\frac{2}{3}$; cependant le contraire n'est pas vrai, & toutes Fractions égales ne sont pas réductibles aux mêmes termes les plus simples, comme je le ferai voir dans autre endroit. (Voyez *Elémens d'Algébre* Art. 193.)

Pour faciliter l'intelligence de l'Article suivant, il est à propos de dire que cette marque × est le signe de la multiplication, & qu'en ce signe lisant on le prononce *par*: ainsi 2 × 3, ou 2 *par* 3, signifient 6; 2 × 3 × 4 signifient 24; 2 × 3 × 4 × 5 signifient 120, *&c*; & dans certains cas, il vaut mieux exprimer ainsi la multiplication de ces termes l'un par l'autre, que par le produit de leur multiplication, comme il paroîtra dans l'article suivant. Il faut remarquer qu'il n'importe pas dans quel ordre ces chiffres sont placés; car 2 × 3 × 4 × 5 sont justement la même chose que 4 × 5 × 2 × 3.

Réduction des Fractions de différentes Dénominations à d'autres de la même Dénomination.

8. Il y a une autre réduction des Fractions, non moins utile que la précédente, savoir la réduction des Fractions de différentes dénominations à d'autres de même dénomination, ou qui ayent le même Dénominateur, en conservant la valeur qu'elles avoient: Voici comme cela se fait. Après avoir rangé en quelque ordre toutes les Fractions à réduire, commencez par la premiére, prenez-en le Numérateur, & multipliez-le par tous les Dénominateurs de toutes les Fractions, excepté le sien propre, & mettez le produit de toutes ces multiplications sous cette premiére Fraction; ensuite multipliez de même le Numérateur de la seconde Fraction, par tous les Dénominateurs, excepté le sien propre, &

mettez

mettez ce produit sous cette seconde Fraction ; & faites de-même pour tous les Numérateurs, ayant toujours l'attention d'excepter de la multiplication le Dénominateur de la Fraction, dont le Numérateur est actuellement multiplié. Enfin multipliez tous les Dénominateurs l'un par l'autre, & mettez-en le produit sous chacun des produits que vous avez trouvés, & vous aurez une autre suite de Fractions, toutes de la même dénomination, & dont les valeurs seront respectivement les mêmes que celles des Fractions dont elles sont provenues. Par exemple, soient proposées pour être réduites à la même dénomination les Fractions suivantes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{8}$: 1°. Le Numérateur de la première Fraction est 1, & les Dénominateurs des autres Fractions sont 4, 6 & 8; or $1 \times 4 \times 6 \times 8$ donne 192; ainsi je mets 192 sous $\frac{1}{2}$. 2°. Le Numérateur de la seconde Fraction est 3, & les Dénominateurs des autres sont 6, 8 & 2; or $3 \times 6 \times 8 \times 2$, donnent 288; c'est pourquoi je mets 288 sous $\frac{3}{4}$. 3°. $5 \times 8 \times 2 \times 4$, donnent 320, & je mets 320 sous $\frac{5}{6}$. 4°. $7 \times 2 \times 4 \times 6$ donnent 336, & je mets 336 sous $\frac{7}{8}$. Enfin le nombre $2 \times 4 \times 6 \times 8$ (ou le produit de tous les Dénominateurs) est 384, que je mets sous chacun des Numérateurs que je viens de trouver; & j'ai une autre suite de Fractions, savoir, $\frac{192}{384}$, $\frac{288}{384}$, $\frac{320}{384}$, $\frac{336}{384}$, toutes de la même dénomination, comme il paroît par l'opération même, & toutes respectivement de la même valeur que celles dont elles viennent, comme il paroîtra dans le moment; mais premiérement faites l'opération réguliérement & la rangez ainsi.

$$\frac{1}{2}. \qquad \frac{3}{4}. \qquad \frac{5}{6}. \qquad \frac{7}{8}.$$

$$\frac{192}{384}. \qquad \frac{288}{384}. \qquad \frac{320}{384}. \qquad \frac{336}{384}.$$

Démonstration de cette règle.

Pour cette Démonstration, il suffit de faire voir par la nature de l'opération même, que les Fractions données ne souffrent aucun changement dans leurs valeurs par cette réduction; pour cet effet, il faut écrire au long la composition des nouveaux Numérateurs au-lieu de les exprimer par leurs produits, comme dans l'Article précédent; & en faire de-même de leur Dénominateur commun, & l'on aura;

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{3}{4} \qquad \frac{5}{6} \qquad \frac{7}{8}$$

$$\frac{1 \times 4 \times 6 \times 8}{2 \times 4 \times 6 \times 8}. \qquad \frac{3 \times 6 \times 8 \times 2}{4 \times 6 \times 8 \times 2}. \qquad \frac{5 \times 8 \times 2 \times 4}{6 \times 8 \times 2 \times 4}. \qquad \frac{7 \times 2 \times 4 \times 6}{8 \times 2 \times 4 \times 6}.$$

Par cette méthode d'opérer, il paroît d'abord que le Numérateur & le Dénominateur de la première Fraction $\frac{1}{2}$ sont tous deux multipliés par les

les mêmes nombres dans cette réduction, savoir, par $4 \times 6 \times 8$; & par conséquent que la Fraction ne souffre aucun changement dans sa valeur, suivant l'Article 6. De-même, les termes de la seconde Fraction $\frac{1}{4}$ sont multipliés par les mêmes nombres $6 \times 8 \times 2$; ainsi la valeur de cette Fraction n'est pas non plus changée; & il en est de-même de toutes les autres. *C. Q. F. D.*

Autres exemples de cette règle.

$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$.
$\frac{360}{720}$.	$\frac{240}{720}$.	$\frac{180}{720}$.	$\frac{144}{720}$.	$\frac{120}{720}$.	$\frac{120}{360}$.	$\frac{90}{360}$.	$\frac{72}{360}$.	$\frac{60}{360}$.

$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$.
$\frac{30}{120}$.	$\frac{24}{120}$.	$\frac{20}{120}$.	$\frac{6}{30}$.	$\frac{5}{30}$.

L'usage de cette règle paroîtra bientôt dans l'addition & dans la soustraction des Fractions; en attendant il n'est pas mal à propos d'observer, qu'il seroit fort difficile, si non impossible, de comparer ensemble des Fractions de différentes dénominations, sans les réduire à la même dénomination. Par exemple, supposé qu'on me demandât, laquelle de ces deux Fractions, $\frac{3}{4}$, ou $\frac{5}{7}$, est la plus grande; il paroîtroit difficile au premier coup d'œil de répondre à cette question; mais lorsque je sais que $\frac{3}{4}$ est la même chose que $\frac{21}{28}$, & que $\frac{5}{7}$, est la même chose que $\frac{20}{28}$, je vois d'abord que la Fraction $\frac{3}{4}$ est plus grande que $\frac{5}{7}$ de la vingt-huitieme partie du tout. Passons à présent aux quatre opérations sur les Fractions, savoir; leur Addition, Soustraction, Multiplication & Division.

De l'Addition des Fractions.

9. Lorsque plusieurs Fractions doivent être ajoûtées ensemble, réduisez-les d'abord à la même dénomination, si elles n'y sont pas déjà, & alors additionnant les nouveaux Numérateurs ensemble, plaçez au-dessous de cette somme le commun Dénominateur. Lorsque vous avez des nombres mixtes, additionnez premiérement les Fractions, & ensuite les nombres entiers: mais si les Fractions additionnées forment une Fraction improprement dite, réduisez-la suivant l'Article 2, à un nombre entier ou mixte; & en écrivant la partie fractionnelle, s'il en reste une, réservez le nombre entier pour le mettre avec les entiers.

On pourroit rapporter à cette règle, si on ne l'avoit déjà enseigné dans l'Article 3, la réduction d'un nombre mixte à une Fraction impropre-

prement dite : car il ne faut pour cela qu'ajoûter à un nombre entier une Fraction ; ce qui peut se faire en considérant le nombre entier comme une Fraction dont le Dénominateur est l'Unité.

Exemples d'Addition en Fractions.

1°. $\frac{3}{12}$ & $\frac{4}{12}$ ajoûtés ensemble font $\frac{7}{12}$, par la même raison que 3 schellings & 4 schellings ajoûtés ensemble font 7 schellings.

2°. Les Fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, réduites à la même dénomination, par l'Article précédent, font $\frac{4}{12}$ & $\frac{3}{12}$, & ajoûtées ensemble font $\frac{7}{12}$; ainsi les Fractions $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$, ajoûtées ensemble font $\frac{7}{12}$.

Pour confirmer ces conclusions abstraites, & pour accoutumer les commençans à concevoir nettement les Fractions, il ne sera pas mal d'appliquer ces exemples à quelques cas particuliers. Prenons celui de la livre st., & voyons si le $\frac{1}{3}$ & le $\frac{1}{4}$ d'une livre st., ajoûtés ensemble font $\frac{7}{12}$ d'une livre st. ou non : par la division nous trouvons que le tiers d'une livre st. est 6 schellings & 8 sous, & que le quart d'une livre st. est 5 schellings ; ces deux sommes font ensemble 11 schellings & 8 sous ; ainsi $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ d'une livre st. ajoûtés ensemble font 11 schellings & 8 sous ; mais par l'Article 5 on trouvera que $\frac{7}{12}$ d'une livre st. font aussi 11 schellings & 8 sous ; donc $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ d'une livre st. ajoûtés ensemble font $\frac{7}{12}$ d'une livre st. ; & la même chose aura lieu dans quelque cas que ce soit.

3°. $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{8}$, c'est-à-dire $\frac{16}{40}$ & $\frac{15}{40}$, ajoûtés ensemble font $\frac{31}{40}$; ce qui sera vrai aussi quand il s'agira d'une livre st. : car par l'Article 5. $\frac{2}{5}$ d'une livre st. font 8 schellings, & $\frac{3}{8}$ font 7 schellings & 6 sous ; & leur somme est 15 schellings & 6 sous ; qu'on trouvera aussi être la valeur de $\frac{31}{40}$ d'une livre st. ; ainsi $\frac{2}{5}$ & $\frac{3}{8}$ d'une livre st. ajoûtés ensemble font $\frac{31}{40}$ d'une livre st.

4°. $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, c'est-a-dire, $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$, ajoûtés ensemble, font $\frac{22}{15}$, Fraction improprement dite, laquelle reduite à un nombre mixte, suivant l'Art. 2, est 1 & $\frac{7}{15}$: voyons à-présent si $\frac{2}{3}$ d'une livre st. & $\frac{4}{5}$ d'une pareille livre, ajoûtés ensemble, font une livre & $\frac{7}{15}$, de livre, ou non : $\frac{2}{3}$ d'une livre st. ou 13 schellings & 4 sous, ajoûtés à $\frac{4}{5}$ d'une livre st. ou 16 schellings, font une livre 9 schellings & 4 sous ; & $\frac{7}{15}$ d'une livre st. font justement 9 schellings & 4 sous ; ainsi $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ d'une livre st. ajoûtés l'un à l'autre font une livre & $\frac{7}{15}$ d'une livre st.

5°. $\frac{3}{4}$ & $\frac{5}{6}$, c'est-à-dire, $\frac{18}{24}$ & $\frac{20}{24}$, ajoûtés l'un à l'autre, font $\frac{38}{24}$, ou $1\frac{7}{12}$, ce qu'on trouvera vrai aussi en l'appliquant à la livre st.

6°. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, c'est-à-dire, $\frac{360}{720}$, $\frac{240}{720}$, $\frac{180}{720}$, $\frac{144}{720}$, $\frac{120}{720}$, additionnés font $\frac{1044}{720}$; c'est-à-dire $\frac{19}{20}$: faites l'opération en monnoyes.

7°. $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, c'eſt-à-dire, $\frac{360}{720}$, $\frac{480}{720}$, $\frac{540}{720}$, $\frac{576}{720}$, $\frac{600}{720}$, additionnés font $\frac{2556}{720}$, c'eſt-à-dire, $3\frac{11}{20}$.

8°. La ſomme des nombres mixtes $7\frac{1}{3}$ & $8\frac{1}{4}$ eſt $15\frac{7}{12}$; car la ſomme des Fractions eſt $\frac{7}{12}$ ſuivant le ſecond exemple, & la ſomme des Entiers eſt 15.

9°. $5\frac{2}{3}$ ajoûtés à $7\frac{4}{5}$, donnent $13\frac{7}{15}$; car la ſomme des Fractions eſt $1\frac{7}{15}$, ſuivant le quatriéme exemple; & ce nombre entier 1 ajoûté aux entiers 5 & 7, donne 13.

10°. $8\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, $10\frac{3}{4}$, $11\frac{4}{5}$, $12\frac{5}{6}$, additionnés donnent $53\frac{11}{20}$; car les Fractions donnent $3\frac{11}{20}$, ſuivant l'exemple ſeptiéme, & le nombre entier 3 joint aux autres entiers fait 53.

11°. Le nombre entier 2, ajoûté à la Fraction $\frac{3}{4}$, donne $\frac{11}{4}$; car le nombre entier 2, peut être conſidéré comme une Fraction, dont le Dénominateur eſt l'Unité; or $\frac{2}{1}$ & $\frac{3}{4}$, réduits à la même dénomination, ſont $\frac{8}{4}$ & $\frac{3}{4}$, qui joints enſemble ſont $\frac{11}{4}$.

C'eſt ainſi pareillement que l'Unité peut être additionnée avec quelque Fraction que ce ſoit, lorſque la ſouſtraction le rend néceſſaire. Mais il vaut mieux encore tourner la choſe ainſi: l'Unité peut être changée en une Fraction de quelque dénomination que l'on voudra, pourvu que le Numérateur ſoit égal au Dénominateur; voyez l'Art. 2. Suppoſé donc que vous vouliez ajoûter l'unité à $\frac{2}{3}$; faites l'unité égale à $\frac{3}{3}$, & cette Fraction ajoûtée à $\frac{2}{3}$, fait $\frac{5}{3}$: l'unité ajoûtée à $\frac{3}{5}$, fait $\frac{8}{5}$; car $\frac{5}{5}$, & $\frac{3}{5}$ font $\frac{8}{5}$.

Souſtraction des Fractions.

10°. Lorſqu'une moindre Fraction doit être retranchée d'une plus grande, il faut les préparer comme pour l'Addition; c'eſt-à-dire qu'il faut les réduire à la même dénomination, ſi elles n'y ſont pas déjà. Alors retranchant le Numérateur de la moindre Fraction de celui de la plus grande, écrivez le reſte avec le commun Dénominateur deſſous. Quand il s'agit de nombres mixtes, il faut ſouſtraire d'abord la Fraction du plus petit nombre de celle du plus grand, & enſuite le plus petit nombre entier du plus grand; mais ſi, comme il arrive ſouvent, le plus grand nombre mixte a la plus petite Fraction, il faut emprunter une unité du nombre entier & l'ajoûter à la Fraction, comme il a été inſinué à la fin de l'Article précédent.

Exemples de Souſtractions de Fractions.

1°. $\frac{3}{10}$ étant ſouſtraits de $\frac{4}{10}$, reſte $\frac{1}{10}$; tout comme 3 ſchellings étant retranchés de 4 ſchellings, il reſte 1 ſchelling.

2°. $\frac{3}{4}$ étant retranchés de $\frac{5}{6}$, c'eſt-à-dire $\frac{18}{24}$ de $\frac{20}{24}$, il reſte $\frac{2}{24}$ ou $\frac{1}{12}$. Ainſi $\frac{3}{4}$ de



de livre st., ou 15 schellings, étant retranchés de $\frac{5}{6}$ de livre, ou de 16 schellings & 8 sous, il reste $\frac{1}{12}$ de livre, qui est 1 schelling & 8 sous.

3°. $7\frac{1}{3}$ étant retranchés de $8\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $7\frac{2}{6}$ étant retranchés de $8\frac{3}{6}$, il reste $1\frac{1}{6}$.

4°. $7\frac{3}{4}$ étant soustraits de $8\frac{1}{4}$, c'est-à-dire $7\frac{3}{4}$ étant soustraits de $7\frac{5}{4}$, donnent $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$; car le plus grand nombre ayant la plus petite Fraction, j'emprunte une unité du nombre entier 8, qui se trouve réduit à 7; & cette unité, je l'ajoûte sous la forme de $\frac{4}{4}$ à la Fraction $\frac{1}{4}$, qui devient par-là $\frac{5}{4}$.

5°. $7\frac{2}{3}$ étant soustraits de $8\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $7\frac{4}{6}$ de $8\frac{3}{6}$, ou $7\frac{4}{6}$ de $7\frac{9}{6}$, donnent $\frac{5}{6}$.

6°. $7\frac{3}{5}$ étant soustraits de 8, c'est-à-dire, $7\frac{3}{5}$ de $7\frac{5}{5}$, il reste $\frac{2}{5}$.

Multiplication des Fractions.

11. Multiplier par un nombre entier, c'est prendre le Multiplicande autant de fois que ce nombre entier contient d'unités; ainsi multiplier par un nombre mixte, est non seulement prendre le Multiplicande autant de fois que le nombre entier contient d'unités, mais encore prendre par dessus une partie, ou des parties de ce Multiplicande, autant qu'il est exprimé par la Fraction du nombre mixte. Ainsi 10 multipliés par $2\frac{1}{2}$, donnent 25: car, comme le nombre $2\frac{1}{2}$ est mitoyen entre 2 & 3, ainsi le produit doit être mitoyen entre 20 & 30, c'est-à-dire, 25. Pareillement, 10 multipliés par $1\frac{1}{2}$, donnent 15; & multipliés par $\frac{1}{2}$, donnent 5. Multiplier par une Fraction proprement dite, n'est donc autre chose que prendre telle partie; ou telles parties du Multiplicande, qu'exprime la Fraction. Certainement, prendre 10 deux fois & une demie fois de plus, une fois & une demie fois de plus, nulle fois & une demie fois de plus (ce qui est prendre la moitié de 10,) font des opérations de même espéce, & ne différent l'une de l'autre qu'en degré; & si les deux premiéres passent sous le nom de Multiplication, la derniére doit y passer aussi; & s'il y a de l'absurdité, elle n'est que dans le nom & point dans la chose.

L'Arithmétique n'a d'abord été employée qu'à opérer sur les nombres entiers, & à cet égard le nom de multiplication étoit assez convenable, excepté dans le cas de l'Unité. Mais lorsqu'on vint à considérer, qu'il n'y a point d'Unité qui ne soit divisible encore; & que par conséquent il y avoit non seulement une infinité de nombres fractionnels au-dessous de l'Unité, mais aussi qu'entre deux nombres entiers quels qu'ils soient, il y a une infinité de nombres mixtes; on jugea, & avec raison, que l'Arithmétique seroit très-imparfaite, si ses opérations ne s'étendoient pas aussi à ces sortes de nombres; mais on ne changea pas le nom de ces opérations, & celui de Multiplication se trouva peu exact; pour ce

qu'il

qu'il signifioit; ce qui doit être attribué à un manque de prévoyance inévitable dans ceux qui ont imposé ces noms, & non à aucun défaut dans la Science même. La même chose a lieu dans bien d'autres Sciences, dont les objets se sont étendus au-delà de ce qu'elles étoient quand leurs noms leur furent imposés. Ainsi la Géométrie, dont le nom n'exprime que l'Art de mesurer le terrain, est à-présent la Science qui traite de la nature & des propriétés de toutes les Figures, ou plutôt de toutes les modifications de l'Etendue; desorte que l'Art de mesurer le terrain, ou l'Arpentage, n'en est à-présent que la moindre partie. Ainsi l'Hydrostatique, qui originairement n'est que l'Art de peser les corps dans l'eau, ou plutôt l'Art de trouver les gravités spécifiques des corps en les pesant dans l'eau, est à-présent la Science qui traite de la nature & des propriétés des Fluïdes en général; & les propriétés de l'Air & du Mercure, entant qu'ils sont fluïdes, sont les objets de l'Hydrostratique, autant que l'eau même.

Mais on insistera peut-être, & l'on dira, que prendre la moitié d'une quantité n'est pas la multiplier, mais la diviser. A quoi je réponds, qu'il est impossible de prendre la moitié d'une quantité sans la diviser par 2; & par conséquent que multiplier par $\frac{1}{2}$, a le même effet que de diviser par 2; mais cela ne prouve pas que la Multiplication & la Division soient la même chose; mais bien que ces deux opérations, quoique contraires, peuvent s'employer dans certains cas l'une pour l'autre, ce qui n'est pas un mystére pour quiconque est versé dans l'Arithmétique, & sera d'ailleurs expliqué dans l'Article suivant.

Une Fraction peut être multipliée par un nombre entier en deux maniéres; ou en multipliant le Numérateur par ce nombre, ou en divisant le Dénominateur par ce même nombre, lorsque cette division est possible: ainsi si la Fraction $\frac{5}{6}$ doit être multipliée par 2, le produit sera de même valeur, soit qu'on double le Numérateur, comme $\frac{10}{6}$, ou qu'on divise le Dénominateur par 2, comme $\frac{5}{3}$: & c'est ce qui est évident par l'Art. 6. où l'on a prouvé qu'une Fraction est également augmentée, soit en augmentant le Numérateur, soit en diminuant le Dénominateur.

Si une Fraction doit être multipliée par une Fraction, multipliez le Numérateur & le Dénominateur du Multiplicande, par le Numérateur & par le Dénominateur du Multiplicateur respectivement, & la Fraction qui résultera de ces opérations sera le produit cherché. Ainsi, s'il s'agissoit de multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, ou, ce qui est la même chose, s'il s'agissoit de savoir combien sont $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, la réponse est $\frac{8}{15}$; & la raison en est évidente: car $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5}$ est $\frac{4}{15}$, suivant l'Art. 6. parceque faire le Dénominateur trois

fois

fois plus grand, c'est faire la Fraction trois fois plus petite; mais si $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{5}$ est $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ font deux fois autant, c'est-à-dire $\frac{8}{15}$; ainsi pour savoir le produit de $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, il faut multiplier le Numérateur & le Dénominateur de $\frac{4}{5}$ par le Numérateur & le Dénominateur de $\frac{2}{3}$ respectivement; & le même raisonnement a lieu en tout autre cas.

Si un nombre entier doit être multiplié par une Fraction, changez le Multiplicande en Multiplicateur, & opérez comme ci-devant; ou autrement, considérez le Multiplicande comme une Fraction dont le Dénominateur est l'Unité, & opérez comme si vous deviez multiplier deux Fractions l'une par l'autre : par ce moyen vous réduirez les deux règles en une. Ainsi 6 ou $\frac{6}{1}$, multipliés par $\frac{2}{3}$, donnent $\frac{12}{3}$, ou 4.

Si le Multiplicateur ou le Multiplicande, ou l'un & l'autre sont des nombres mixtes, il faut premiérement les réduire en Fractions improprement dites, selon l'Art. 3; & alors les multiplier suivant la règle générale.

Exemples de la Multiplication des Fractions.

1°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$, en multipliant les Numérateurs, l'un par l'autre, & les Dénominateurs, l'un par l'autre, font $\frac{14}{24}$ ou $\frac{7}{12}$: & cela se trouve aussi dans tous les cas particuliers: car $\frac{7}{8}$ d'une livre st. font 17 schellings & 6 sous; & $\frac{2}{3}$ de 17 schellings & 6 sous valent (suivant l'Art. 5.) $\frac{1}{3}$ de 35 schellings, c'est-à-dire 11 schellings & 8 sous; ainsi $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ d'une livre st. font 11 schellings & 8 sous, qu'on trouvera aussi être la valeur de $\frac{7}{12}$ d'une livre st.

Ici nous pouvons observer, que toutes les fois que deux Fractions doivent être multipliées l'une par l'autre, le produit est toujours le même, par laquelle des deux que l'on multiplie l'autre, tout comme il en est des nombres entiers, & par la même raison; car si $\frac{7}{8}$ doivent être multipliés par $\frac{2}{3}$, les nombres 7 & 8 doivent être multipliés respectivement par 2 & 3; mais si $\frac{2}{3}$ doivent être multipliés par $\frac{7}{8}$, alors les nombres 2 & 3 doivent être multipliés respectivement par 7 & 8, ce qui revient au même: d'où il suit que $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ font précisément la même chose que $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{3}$. En voici une autre preuve: nous avons déjà vu que $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ d'une livre st. font 11 schellings & 8 sous; voyons à-présent ce que font $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{3}$ d'une livre st.: $\frac{2}{3}$ d'une livre st. font 13 schellings & 4 sous; & $\frac{7}{8}$ de 13 schellings & 4 sous, ou $\frac{1}{8}$ de 93 schellings & 4 sous, font 11 schellings & 8 sous; ainsi $\frac{2}{3}$ de $\frac{7}{8}$ d'une livre st. font la même chose, que $\frac{7}{8}$ de $\frac{2}{3}$ d'une livre st., puisque chacune de ces quantités en particulier est égale à 11 schellings & 8 sous.

2°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{5}{6}$ de $\frac{9}{10}$ font $\frac{90}{180}$, ou $\frac{1}{2}$: car $2 \times 5 \times 9$ font 90, & $3 \times 6 \times 10$,

font 180: ainsi $\frac{9}{10}$ d'une livre st. font 18 schellings; & $\frac{5}{6}$ de 18 schellings font 15 schellings; & $\frac{2}{3}$ de 15 schellings font 10 schellings, qui font $\frac{1}{2}$ d'une livre st.

3°. $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{3}{4}$ font $\frac{27}{64}$: ainsi $\frac{3}{4}$ d'une livre st. font 15 schellings; & $\frac{3}{4}$ de 15 schellings font 11 schellings & 3 sous; & $\frac{3}{4}$ de 11 schellings & 3 sous font 8 schellings, 5 sous & un liard; qu'on trouvera aussi être $\frac{27}{64}$ d'une livre st.

4°. Le nombre mixte $6\frac{3}{4}$ multiplié par le nombre entier 7, ou le nombre entier 7 multiplié par le nombre mixte $6\frac{3}{4}$, donnera dans l'un & l'autre cas $47\frac{1}{4}$; car le nombre mixte $6\frac{3}{4}$ réduit (suivant l'Art. 3.) en une Fraction improprement dite, devient $\frac{27}{4}$; qui multipliés par 7, ou $\frac{7}{1}$ font $\frac{189}{4}$, lesquels réduits à un nombre mixte sont égaux à $47\frac{1}{4}$.

Cette multiplication peut se faire encore de la maniére suivante: $\frac{3}{4}$ multipliés par 7 font $\frac{21}{4}$, c'est-à-dire, (par l'Art. 2.) $5\frac{1}{4}$; écrivez la Fraction $\frac{1}{4}$ & retenez 5; multipliez 6 par 7, & vous aurez 42, qui avec le nombre 5 retenu, font 47; donc le produit est $47\frac{1}{4}$, comme ci-devant.

5°. $3\frac{3}{4}$ multipliés par $2\frac{2}{3}$, c'est-à-dire, $\frac{15}{4}$ multipliés par $\frac{8}{3}$, font $\frac{120}{12}$, c'est-à-dire, 10: ainsi $3\frac{3}{4}$ d'une livre st. font 3 livres st. & 15 schellings, & deux fois 3 livres st. & 15 schellings, font 7 livres st. & 10 schellings; de plus $\frac{2}{3}$ de 3 livres st. & 15 schellings, ou $\frac{1}{3}$ de 7 livres st. & 10 schellings, font 2 livres st. & 10 schellings; or ces 2 livres st. & 10 schellings, ajoûtés à la premiére partie du produit, qui est 7 livres st. & 10 schellings, font 10 livres st. pour le produit entier; donc $3\frac{3}{4}$ de livre st. multipliés par $2\frac{2}{3}$ font 10 livres.

6°. $96\frac{1}{2}$ multipliés par $24\frac{1}{3}$, c'est-à-dire, $\frac{193}{2}$ par $\frac{73}{3}$ font $\frac{14089}{6}$, ce qui est, (par l'Art. 2.) $2348\frac{1}{6}$.

7°. Le nombre $36\frac{1}{4}$ multiplié par lui-même, c'est-à-dire, $\frac{145}{4}$ par $\frac{145}{4}$ fait $\frac{21025}{16}$, c'est-à-dire, $1314\frac{1}{16}$.

Avant de finir cet Article, je ne sai si on trouvera que je n'ai pas tort de m'arrêter à une question fort absurde, qu'on n'a agitée que trop souvent, savoir de multiplier $\frac{1}{3}$ de livre par $\frac{1}{2}$ de livre: je l'appelle une question absurde, parce qu'elle renferme une expression qui n'a aucun sens; car dans l'idée ou définition de la Multiplication, le Multiplicateur au moins est supposé un nombre abstrait, ou une Fraction abstraite, autrement quel sens auroient ces mots, de prendre le Multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le Multiplicateur? Si multiplier $\frac{1}{3}$ de livre par $\frac{1}{2}$ de livre, ne signifie autre chose que multiplier $\frac{1}{3}$ de livre par

$\frac{1}{2}$,

$\frac{1}{3}$, pourquoi ajoûter le mot de livre au Multiplicateur? & ſi cela ſignifie quelque choſe de plus, pourquoi ceux qui propoſent la queſtion ne l'expliquent-ils pas? Qu'ils me diſent ce qu'ils entendent par 1 livre multipliée par 1 livre, & j'aurai bientôt répondu à leur queſtion ; mais s'ils ne veulent ou ne peuvent l'expliquer, la queſtion ne mérite pas de réponſe & n'en eſt pas ſuſceptible. Je n'ignore pas une autre queſtion plus ſouvent agitée encore, & qui n'auroit pas plus de ſens, ſi l'uſage ne l'expliquoit, c'eſt de multiplier 3 aunes par 2 aunes; par où l'on n'entend autre choſe, que déterminer le nombre d'aunes quarrées, contenues dans un quarré long de 3 aunes & large de 2 aunes ; & cette explication ſuffit pour lever la difficulté.

LEMME.

12. *Soit* n *un nombre quelconque entier, mixte ou Fraction; je dis que le quotient de* n *diviſé par quelque Fraction que ce ſoit, eſt égal au produit de* n *multiplié par l'inverſe de cette Fraction*: c'eſt-à-dire, par une nouvelle Fraction, qui ait pour Numérateur le Dénominateur de l'autre, & réciproquement; par exemple

Soit n diviſé par $\frac{3}{2}$; je dis que le quotient de n diviſé par $\frac{3}{2}$ ſera égal au produit de n multiplié par $\frac{2}{3}$: pour le prouver, ſoit q le quotient de n diviſé par $\frac{3}{2}$; c'eſt-à-dire, ſoit q le nombre qui exprime combien de fois la Fraction $\frac{3}{2}$ eſt contenue dans n; en ce cas $\frac{3}{2}$ multipliés par q ſont égaux à n, par la nature de la multiplication; mais le produit de $\frac{3}{2}$ multipliés par q eſt le même que le produit de q multiplié par $\frac{3}{2}$; c'eſt-à-dire $\frac{3}{2}$ de q, par l'Art. précédent ; donc n eſt égal à $\frac{3}{2}$ de q; donc $\frac{1}{3}$ de n eſt égal à $\frac{1}{2}$ de q; donc $\frac{2}{3}$ de n ſont égaux à q; mais $\frac{2}{3}$ de n ſont le produit de n multiplié par $\frac{2}{3}$; donc le produit de n multiplié par $\frac{2}{3}$ eſt égal à q; mais le quotient de n diviſé par $\frac{3}{2}$ eſt q, par la ſuppoſition; donc le quotient de n diviſé par $\frac{3}{2}$, eſt égal au produit de n multiplié par $\frac{2}{3}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Ainſi la règle de la Diviſion peut en toute occaſion être changée en celle de la Multiplication, ſeulement en changeant les termes du Diviſeur, & alors en multipliant, au-lieu de diviſer. La même choſe a lieu dans les nombres entiers, ſi on les conſidère comme des Fractions dont le Dénominateur eſt l'Unité : ainſi diviſer n par 2, c'eſt-à-dire par $\frac{2}{1}$, aura le même effet que de le multiplier par $\frac{1}{2}$, comme il a été dit dans l'Article précédent.

 De

De la Division des Fractions.

13. La Division des Fractions, comme toute autre Division, consiste à trouver combien une Fraction, appellée le Diviseur, est contenue dans une autre, nommée le Dividende; & ce qui exprime ce rapport, est dit le quotient, soit qu'il se trouve être un nombre entier, ou un nombre mixte, ou une Fraction proprement dite: car dans la division des Fractions, le quotient doit toujours être exact sans aucun reste, & par conséquent être quelquefois un nombre entier, quelquefois un nombre mixte, & quelquefois une Fraction proprement dite. Ainsi, si le nombre 18 est divisé par 6, le quotient est 3; parce que 18 contient 6, trois fois: mais si 21 sont divisés par 6, le quotient est $3\frac{1}{2}$; parce que 21 contiennent 6 trois fois & une demie fois de plus: enfin si 3 sont divisés par 6, le quotient sera $\frac{1}{2}$; parce que le Diviseur étant plus grand que le Dividende ne peut être une seule fois contenu dans celui-ci; donc le quotient dans ce cas, doit être une Fraction proprement dite: & c'est $\frac{1}{2}$, puisque 3 sont justement la moitié de 6.

Une Fraction peut être divisée par un nombre entier de deux maniéres; ou en divisant le Numérateur par ce nombre entier, si cela est possible, ou en multipliant le Dénominateur par ce même nombre: ainsi on peut prendre la moitié de $\frac{6}{7}$ (c'est-à-dire que $\frac{6}{7}$ sont divisibles par 2) soit en divisant le Numérateur par 2, ce qui donnera pour quotient $\frac{3}{7}$; soit en doublant le Dénominateur: en ce cas le quotient sera $\frac{6}{14}$: or ces deux Fractions sont d'égale valeur, suivant les Art. 6 & 7.

Si le Diviseur est une Fraction, on aura le quotient en multipliant le Dividende par l'inverse du Diviseur, suivant les règles de Multiplication ci-devant expliquées: ainsi s'il falloit diviser $\frac{4}{5}$ par $\frac{2}{3}$, le quotient seroit le même que le produit de $\frac{4}{5}$ multipliés par $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\frac{12}{10}$, ou $1\frac{1}{5}$; cela vient d'être démontré dans l'Art. précédent.

Nous pouvons observer ici, de même que dans l'Art. 11. que si le Diviseur ou le Dividende, ou l'un & l'autre, sont des nombres mixtes, il faut les réduire en Fractions improprement dites, afin de pouvoir leur appliquer la règle générale; & si l'un d'eux ou tous les deux sont des nombres entiers, il faut les considérer comme des Fractions, dont le Dénominateur est l'Unité.

Nous inférons de la règle générale donnée ci-dessus concernant la Division, que chaque Fraction peut être considérée comme le quotient du Numérateur divisé par le Dénominateur, & cela, soit que les termes de la Fraction soient des nombres entiers, ou (ce qui arrive quelquefois) des

des nombres mixtes, ou même de pures Fractions : il suffira de démontrer ce dernier cas, dans lequel les deux autres sont compris, les nombres mixtes étant réductibles à des Fractions, & les nombres entiers pouvant être considérés comme des Fractions, dont les Dénominateurs sont autant d'unités. Que la Fraction proposée soit $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$; je dis, que cette Fraction est égale au quotient qui résulte de la division du Numérateur $\frac{4}{7}$ par le Dénominateur $\frac{2}{3}$: pour s'en convaincre, on n'a qu'à multiplier tant le Numérateur $\frac{4}{7}$, que le Dénominateur $\frac{2}{3}$, par $\frac{3}{2}$, c'est-à-dire, par 3, Dénominateur de la Fraction $\frac{2}{3}$, divisé par 2, Numérateur de cette même Fraction, & la Fraction se trouvera changée en celle-ci, $\frac{\frac{12}{14}}{1}$ ou $\frac{12}{14}$, qui sera de même valeur que la premiére par l'Art. 6. Mais le quotient de la Fraction $\frac{4}{7}$ divisée par $\frac{2}{3}$ est aussi $\frac{12}{14}$ comme ci-dessus; donc la Fraction $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$ est égale au quotient qui résulte de la division du Numérateur par le Dénominateur: & le même raisonnement est applicable à tout autre cas. Cette considération est d'un très-grand usage en Algébre, où les quantités sont souvent exprimées d'une façon si générale, qu'il n'y a aucun autre moyen de représenter le quotient, que par une Fraction dont le Numérateur est le Dividende & le Dénominateur le Diviseur. Ce que nous venons de dire contient donc une régle pour réduire une Fraction compliquée à une autre plus simple, dont le Numérateur & le Dénominateur seront des nombres entiers: c'est ainsi, comme nous l'avons vu, que la Fraction $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{2}{3}}$ est la même chose que $\frac{12}{14}$.

Autres exemples de Divisions de Fractions.

1°. $\frac{5}{6}$ divisés par $\frac{3}{4}$, ou, ce qui revient au même, $\frac{5}{6}$ multipliés par $\frac{4}{3}$, font $\frac{20}{18}$, ou $1\frac{1}{9}$; ce qui fait voir que $\frac{3}{4}$ sont contenus une fois & $\frac{1}{9}$ de plus dans $\frac{5}{6}$: pour rendre la chose plus sensible, je dis que $\frac{5}{6}$ d'une livre st. font 16 schellings & 8 sous; & que $\frac{3}{4}$ d'une livre st. font 15 schellings; or 15 schellings sont contenus dans 16 schellings & 8 sous, une fois, & il reste 1 schelling & 8 sous, & 1 schelling & 8 sous font tout juste $\frac{1}{9}$ de 15 schellings. Pour qu'on ne s'y trompe pas, il est bon d'avertir qu'il ne faut renverser que les termes du Diviseur, & non pas ceux du Dividende; ainsi diviser $\frac{5}{6}$ par $\frac{3}{4}$ est la même chose que multiplier $\frac{5}{6}$ par $\frac{4}{3}$, & nullement multiplier $\frac{6}{5}$ par $\frac{4}{3}$.

2°. $\frac{9}{10}$ divisés par $\frac{1}{3}$, ou multipliés par $\frac{3}{1}$, donnent $\frac{27}{10}$, ou $2\frac{7}{10}$, ce qu'on peut vérifier, comme ci-dessus; car $\frac{9}{10}$ d'une livre st. font 18 schellings; & $\frac{1}{3}$ d'une livre st. est 6 schellings & 8 sous : or 6 schellings & 8 sous sont

contenus deux fois dans 18 ſchellings, & il reſte 4 ſchellings, & 8 ſous, leſquels 4 ſchellings & 8 ſous ſe trouvent (par l'Art. 5.) être juſtement $\frac{7}{10}$ de 6 ſchellings & 8 ſous.

3°. Le nombre entier 10 diviſé par $2\frac{2}{3}$, c'eſt-à-dire le nombre $\frac{10}{1}$ diviſé par $\frac{8}{3}$, ou multiplié par $\frac{3}{8}$, donne $\frac{30}{8}$, ou $3\frac{3}{4}$.

4°. $2\frac{2}{3}$ diviſés par $\frac{10}{1}$, ou $\frac{8}{3}$ diviſés par $\frac{10}{1}$, ou multipliés par $\frac{1}{10}$ donnent $\frac{8}{30}$, ou $\frac{4}{15}$.

5°. $16\frac{1}{3}$ diviſés par $1\frac{1}{6}$, c'eſt-à-dire, $\frac{49}{3}$ diviſés par $\frac{7}{6}$, ou multipliés par $\frac{6}{7}$ donnent $\frac{294}{21}$, ou 14.

Remarques ſur la Multiplication & ſur la Diviſion des Fractions.

14. Lorſque deux Fractions ſont multipliées l'une par l'autre, ou que l'une eſt diviſée par l'autre, il arrive ſouvent que quoique les Fractions originales ſoient toutes deux réduites aux termes les plus ſimples, cependant le produit ou le quotient, qui en réſulte, aura beſoin de réduction. Par exemple, les Fractions $\frac{5}{6}$ & $\frac{9}{10}$ ſont réduites aux termes les plus ſimples; cependant étant multipliées l'une par l'autre, leur produit $\frac{45}{60}$ peut être réduit à $\frac{3}{4}$: de même dans la Diviſion $\frac{9}{10}$ & $\frac{15}{16}$ ſont des Fractions réduites aux termes les plus ſimples; cependant, ſi la derniére eſt diviſée par la premiére, le quotient $\frac{150}{144}$ peut ſe réduire à $\frac{25}{24}$. Il ne ſera pas hors de propos de rechercher la raiſon de ceci, & de voir ſi les Fractions originales ne peuvent pas être préparées avant l'opération, de maniére que leur produit, ou leur quotient ſoit toujours réduit à ſa plus grande ſimplicité. D'abord, pour ce qui regarde la multiplication de $\frac{5}{6}$ par $\frac{9}{10}$, il eſt clair que le produit de $\frac{5}{6}$ par $\frac{9}{10}$, eſt juſtement la même choſe que celui de $\frac{5}{10}$ par $\frac{9}{6}$, en faiſant un échange des Dénominateurs des Fractions; c'eſt ce qui paroît par l'opération même; car les mêmes nombres ſont multipliés l'un par l'autre dans les deux cas; mais ces deux derniéres Fractions ne ſont point du tout réduites à leur plus grande ſimplicité; la premiére $\frac{5}{10}$, peut ſe réduire à $\frac{1}{2}$, & la ſeconde $\frac{9}{6}$ à $\frac{3}{2}$: mais après qu'elles ont été réduites à ces deux derniéres $\frac{1}{2}$ & $\frac{3}{2}$, leur produit $\frac{3}{4}$ eſt juſtement de la même valeur que celui des deux Fractions originales, & eſt en même tems exprimé de la maniére la plus ſimple. Ainſi on voit que pour avoir le produit réduit à la derniére ſimplicité, il faut non ſeulement réduire les Fractions originales autant qu'il eſt poſſible; mais de plus faire échange de leurs Dénominateurs, réduire encore ces nouvelles Fractions, & enfin multiplier l'une par l'autre ces derniéres Fractions. La même pratique peut ſervir pour la Diviſion, après qu'on l'a ré-

duite

duite à la règle de la Multiplication. Par exemple, le quotient de $\frac{15}{16}$ divisés par $\frac{9}{10}$, est le même que le produit de $\frac{15}{16}$ multipliés par $\frac{10}{9}$; & ce dernier est le même que le produit de $\frac{15}{9}$ par $\frac{10}{16}$, comme nous l'avons vu ci-dessus; mais les Fractions $\frac{15}{9}$ & $\frac{10}{16}$ ne sont pas réduites à leurs derniers termes; il faut les y réduire, & en faire $\frac{5}{3}$ & $\frac{5}{8}$, si l'on veut que leur produit $\frac{25}{24}$ soit aussi simple qu'il est possible. Voilà donc les deux règles abrégées de Multiplication & de Division, réduites à une seule méthode, au lieu de deux qu'on prescrit ordinairement, & de plus à une méthode qui porte son évidence avec elle.

N. B. Ce que nous venons d'opérer par l'échange des Dénominateurs, & en laissant les Numérateurs à leurs places, pourroit aussi bien se faire, en échangeant les Numérateurs & en laissant les Dénominateurs à leurs places; la même raison étant également valable dans les deux cas.

Règle de proportion en Fractions.

15. Comme cette règle est la même que celle qui a été donnée pour les nombres entiers, il suffira d'en indiquer ici quelques exemples.

Exemples de la règle de proportion en Fractions.

1o. *Si* $\frac{1}{4}$ *donne* $\frac{1}{5}$, *combien donnera* $\frac{1}{6}$? Ici $\frac{1}{5}$ & $\frac{1}{6}$ multipliés l'un par l'autre donnent $\frac{1}{30}$, qui divisé par $\frac{1}{4}$ (ou multiplié par $\frac{4}{1}$) donne $\frac{4}{30}$ ou $\frac{2}{15}$; & la question est résolue.

2°. *Si* $2\frac{2}{3}$ *donnent* $3\frac{3}{4}$, *combien donneront* $4\frac{4}{5}$? Ces nombres mixtes réduits en Fractions improprement dites, (par l'Art. 3.) reviennent à ceci; *si* $\frac{8}{3}$ *donnent* $\frac{15}{4}$, *combien donneront* $\frac{24}{5}$? Ici $\frac{15}{4}$ multipliés par $\frac{24}{5}$ font $\frac{360}{20}$ ou 18, lesquels divisés par $\frac{8}{3}$ donnent $6\frac{3}{4}$; & la question est résolue.

3°. *Si* $\frac{1}{2}$ *verge coute* $\frac{1}{3}$ *de livre, que coutera* $\frac{1}{4}$ *d'aune?* Une aune est $\frac{5}{4}$ de verge, & par conséquent $\frac{1}{4}$ d'aune est $\frac{1}{4}$ de $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{16}$ de verge; la question peut donc être posée ainsi: *si* $\frac{1}{2}$ *verge coute* $\frac{1}{3}$ *de livre, que couteront* $\frac{5}{16}$ *de verge?* Ici $\frac{1}{3}$ & $\frac{5}{16}$ multipliés l'un par l'autre donnent $\frac{5}{48}$, qui divisés par $\frac{1}{2}$ donnent $\frac{5}{24}$ de livre, ou 4 schellings 2 sous; & la question est résolue.

Méthode d'exprimer en nombres entiers la proportion qui se trouve entre des termes Fractionels.

Lorsqu'on propose deux Fractions, comme $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$, dont on veut avoir la proportion en nombres entiers, il faut premiérement réduire les deux Fractions au même Dénominateur (suivant l'Art. 8.) c'est-à-dire dans l'exemple proposé à $\frac{10}{15}$ & $\frac{12}{15}$; alors vous aurez $\frac{2}{3}$ sont à $\frac{4}{5}$ comme $\frac{10}{15}$ à $\frac{12}{15}$; mais $\frac{10}{15}$ sont à $\frac{12}{15}$ comme 10 à 12, ou comme 5 à 6: donc $\frac{2}{3}$ sont à $\frac{4}{5}$ comme 5 est à 6.

On

On peut obſerver que, quoique pour mieux faire comprendre la raiſon de cette règle, il ſoit néceſſaire de trouver un Dénominateur commun, cependant cela n'eſt nullement néceſſaire dans la pratique; car à quoi bon chercher ce Dénominateur pour le négliger dès qu'on l'a trouvé? Dans la pratique donc, multipliez le Numérateur de la Fraction qui eſt la premiére dans la proportion, par le Dénominateur de la ſeconde, & le Numérateur de la ſeconde par le Dénominateur de la premiére, & les deux nombres trouvés donneront reſpectivement en nombres entiers la proportion de la premiére Fraction à la ſeconde, comme il eſt évident par l'exemple propoſé.

De l'extraction des racines en Fractions.

16. Comme une Fraction eſt quarrée, ou multipliée par elle-même, en quarrant ſon Numérateur & ſon Dénominateur (Voyez l'Art. 11.) par la raiſon du contraire la racine quarrée d'une Fraction ſe trouve en tirant la racine quarrée du Numérateur & celle du Dénominateur: ainſi le quarré de $\frac{3}{4}$ eſt $\frac{9}{16}$, & la racine quarrée de $\frac{9}{16}$ eſt $\frac{3}{4}$. Mais il faut obſerver que toutes les fois que l'on cherche la racine quarrée d'une Fraction, il faut réduire cette Fraction aux termes les plus ſimples, par le 7ème. Art. ſans quoi la Fraction pourroit admettre une racine quarrée, qui cependant ſeroit impoſſible à trouver: par exemple, s'il falloit extraire la racine quarrée de la Fraction $\frac{18}{32}$, il n'y auroit moyen d'exprimer ni la racine quarrée du Numérateur, ni celle du Dénominateur; & cependant dès que la Fraction ſe trouvera réduite à ſes plus ſimples termes $\frac{9}{16}$, on verra que ſa racine quarrée eſt $\frac{3}{4}$.

Quand la racine quarrée d'un nombre ne ſauroit être exprimée exactement, on a recours à la méthode d'approximation à l'aide des Fractions décimales, ou autrement, & par ce moyen on approche de la vraye racine d'auſſi près qu'on veut. Or dans le cas d'une Fraction, s'il n'eſt pas poſſible d'exprimer exactement la racine quarrée du Numérateur, non plus que celle du Dénominateur, il n'eſt pas néceſſaire d'employer deux approximations, à cauſe qu'une Fraction peut aiſément être réduite à une autre de même valeur, dont le Dénominateur ſera un quarré connu. Suppoſons, par exemple, qu'il faille trouver la racine quarrée de $46\frac{1}{5}$ ou $\frac{231}{5}$: je multiplie tant le Numérateur que le Dénominateur de cette Fraction par 5, & la change ainſi en $\frac{1155}{25}$: Ici le Dénominateur 25 eſt un quarré connu, qui a pour racine quarrée 5, & la racine quarrée de 1155 eſt à peu près 34; ainſi la racine quarrée de la Fraction propoſée eſt à peu près

près $\frac{1}{7}$, ou $\frac{6}{7}$. Mais après tout, la meilleure méthode d'extraire la racine quarrée d'une Fraction ordinaire, consiste à changer cette Fraction en Fraction décimale, comme nous le verrons dans la suite.

N. B. Tout ce qui vient d'être dit de l'extraction de la racine quarrée en Fractions, peut aisément s'appliquer, *mutatis mutandis*, à l'extraction de la racine cubique, *&c.*

Des Fractions décimales.

Et premiérement de la maniére de les marquer.

17. Une Fraction décimale est une Fraction dont le Dénominateur est 10, ou 100, ou 1000, ou 10000, *&c.* & ce Dénominateur n'est jamais exprimé, mais toujours sousentendu par l'endroit qu'occupe le chifre auquel il appartient ; car comme tous les chifres à la gauche de la place des unités, croissent en valeur, suivant leurs distances de cette place, en raison décuple ; de même tous les chifres à la droite des unités, baissent de valeur en raison sousdécuple : comme, par exemple, le nombre 345, 6789, ou 5 occupe la place des unités, doit se lire ainsi : *trois cens quarante-cinq*, *six dixiémes*, *sept centiémes parties*, *huit milliémes parties*, *neuf dix milliémes parties :* ou les parties décimales peuvent se lire ainsi ; *six mille sept cens quatre-vingts neuf dix milliémes parties* ; le Dénominateur étant dix mille, à cause que le dernier chifre 9, suivant la premiére façon de compter, occupe la place des dix milliémes parties : la seconde façon de lire est fondée sur un principe assez manifeste par lui-même ; car $\frac{6}{10}$ font $\frac{6000}{10000}$, & $\frac{7}{100}$ font $\frac{700}{10000}$, & $\frac{8}{1000}$ font $\frac{80}{10000}$, & $\frac{6000}{10000}$, $\frac{700}{10000}$, $\frac{80}{10000}$, & $\frac{9}{10000}$, ajoûtés ensemble, font $\frac{6789}{10000}$.

On fait usage de zéros dans l'expression des Fractions décimales aussi-bien que de nombres entiers, & par la même raison. Ainsi le nombre 067 peut également se lire, *point de dixiémes*, *six centiémes parties*, *sept milliémes parties* ; ou *soixante-sept milliémes parties*. Mais les zéros à la droite d'un nombre décimal (s'ils ne sont suivis de rien) ont aussi peu de valeur que des zéros à la gauche d'un nombre entier ; & cependant on met quelquefois des zéros après une Fraction décimale, pour la régularité, ou quand on a besoin d'augmenter le nombre des caractéres qui expriment la Fraction décimale.

Ce que nous venons de dire suffit pour faire sentir combien il est facile de multiplier ou de diviser un nombre quelconque par 10, 100, 1000, *&c.* puisqu'il ne faut pour cela que transposer le point de séparation vers la gauche ou vers la droite. Ainsi le nombre 345 .6789 étant

multiplié par 10, devient 3456 .789; & étant multiplié par 100, devient 34567 .89: & le même nombre 345 .6789 étant divisé par 10, devient 34 .56789; & étant divisé par 100, devient 3 .456789: que si l'on vouloit diviser le nombre 345 par 10000, on auroit pour quotient .0345; car diviser par 10000, est la même chose que transporter le point de séparation quatre degrés vers la gauche, s'il se trouve quelque point de séparation dans le nombre donné; mais s'il n'y en a pas, comme dans le cas présent, il faut mettre un point de séparation quatre degrés vers la gauche, ce qui ne sauroit se faire dans cet exemple, à moins qu'on ne mette un zéro dans la première place décimale.

De l'Addition & de la Soustraction des Fractions décimales.

18. Le principal avantage que l'Arithmétique décimale a par dessus celle des Fractions ordinaires, consiste en ceci, que dans les Fractions décimales toutes les opérations se font précisément comme si ces Fractions étoient des nombres entiers.

Pour ce qui regarde l'Addition & la Soustraction, la chose est manifeste, pourvu qu'on ait soin de placer chaque partie décimale au-dessous de quelque autre partie de même espéce: comme par exemple .567 s'additionnent à .89 ainsi;

$$\begin{array}{r} .89 \\ .567 \\ \hline 1.457 \end{array}$$: la soustraction s'en fait ainsi; $$\begin{array}{r} .89 \\ .567 \\ \hline .323 \end{array}$$ ou ainsi; $$\begin{array}{r} .890 \\ .567 \\ \hline .323 \end{array}$$

De la Multiplication des Fractions décimales.

19. Dans la multiplication des Fractions décimales, on s'y prend précisément comme dans celle des nombres entiers; & ce n'est qu'après que l'on a le produit que l'on considére les décimales comme telles; mais alors on retranche à la droite du produit autant de caractéres qu'il s'en trouve dans le Multiplicateur & dans le Multiplicande ensemble: comme par exemple; on demande de multiplier 4 .56 par 2 .3: considérant ici l'un & l'autre de ces nombres comme des nombres entiers, je multiplie 256 par 23, & trouve que le produit est 10488; mais observant ensuite qu'il y a eu une partie décimale dans le Multiplicateur, & deux dans le Multiplicande, je retranche trois parties décimales à la droite du produit, & le vrai produit est 10 .488.

Pour qu'on comprenne mieux la raison de cette opération, on n'a qu'à réduire le Multiplicateur & le Multiplicande à de simples Fractions exprimées à la maniére ordinaire, & l'on aura 2 .3 égaux à $\frac{23}{10}$, & 4 .56 égaux à $\frac{456}{100}$. Ces deux Fractions multipliées l'une par l'autre font

font $\frac{10488}{1000}$: en divisant ce produit par mille, ce qui se fait en retranchant les trois derniers caractéres, suivant l'Art. 17, le quotient sera 10 .488. Voici encore un autre exemple. On demande de multiplier 45600 par .23: le produit de 45600 multipliés par 23 est 1048800: mais comme il y a eu deux parties décimales dans le Multiplicateur donné, & aucune dans le Multiplicande, je retranche deux parties décimales du dernier produit, & le vrai produit se trouve être 10488 .00, ou 10488. Enfin, s'il falloit multiplier .000456 par .23, je négligerois les zéros qui sont à la tête du Multiplicande, & multiplierois simplement 456 par 23, ce qui me donneroit 10488: je me rappellerois ensuite, qu'il y a eu deux parties décimales dans le Multiplicateur, & six dans le Multiplicande, & que par conséquent il faut retrancher huit parties décimales du dernier produit: mais ce produit ne contient que 5 caractéres: c'est pourquoi je place trois zéros à la gauche, avec le point de séparation au devant d'eux, & ai pour vrai produit .00010488.

Ougthred & plusieurs autres ont donné divers abrégés de cette sorte de Multiplication, mais qui sont tels, que tout homme qui veut s'exercer tant soit peu dans cette partie de l'Arithmétique, les découvrira sans peine.

De la Division des Fractions décimales.

20. La division en Fractions décimales se fait, premiérement en les considérant comme des nombres entiers, & en opérant sur elles comme étant de pareils nombres; & puis en retranchant, après l'opération faite, à la droite du quotient, autant de parties décimales, que le dividende en a plus que le diviseur; c'est ce qui paroît manifestement par l'Art. 19: car puisque le diviseur & le quotient, multipliés l'un par l'autre, forment le dividende, le diviseur & le quotient doivent avoir entre eux autant de parties décimales qu'il s'en trouve dans le dividende: donc le quotient seul doit en avoir autant que le dividende en a plus que le diviseur.

Exemple 1er. On demande de diviser 10 .488 par 2 .3: si je divise 10488 par 23, j'aurai pour quotient 456; mais comme il y a trois parties décimales dans le dividende, & une dans le diviseur, je retranche deux parties à la droite du quotient, ce qui me donne pour vrai quotient 4 .56.

Exemple 2d. Soit à diviser le nombre 5678 .9 par .06: comme il y a ici deux parties décimales dans le diviseur, & seulement une dans le dividende, je remplis la place vuide en mettant un zéro après le dividende, ainsi, 5678 .90; divisant ensuite le nombre entier 567890, par le nombre

bre entier 6, (car le nombre 6 étant considéré comme un nombre entier on peut ne faire aucune attention au zéro qui le précéde;) je trouve pour quotient 94648, dont aucune partie ne doit être retranchée, à cause que le dividende a eu, par le moyen du zéro ajoûté, autant de parties décimales que le diviseur; mais comme ce quotient n'est pas exact, si je voulois porter la précision plus loin, & avoir, par exemple, dans le quotient deux parties décimales, au lieu d'un zéro après le dividende, j'en mettrois trois après le diviseur, ce qui me donneroit pour quotient 94648 .33, & ce quotient est bien plus exact que l'autre, comme étant entre 94648 .33 & 94648 .34: mais il faut observer de plus au sujet de ce quotient, que si la division devoit être continuée à l'infini, tous les caractéres des parties décimales seroient des 3: c'est ce qui paroît manifestement par les deux derniers caractéres, qui ne sauroient être l'un & l'autre des 3 sans que les suivans ne le soient pareillement.

Pour réduire une Fraction ordinaire à une Fraction décimale.

21. Comme toute Fraction n'est autre chose que le quotient du Numérateur divisé par le Dénominateur, (Voyez Art. 13,) rien n'est plus facile que de changer une Fraction ordinaire en Fraction décimale: pour cet effet, mettez autant de zéros après le Numérateur qu'il en faut pour égaler le nombre des parties décimales que vous voulez faire entrer dans votre nouvelle Fraction, & considérez ces zéros comme des parties décimales; après quoi divisant le Numérateur par le Dénominateur, le quotient sera un nombre décimal égal à la Fraction premiérement proposée, ou peut-être un nombre mixte, si la Fraction même étoit une Fraction improprement dite.

Exemple 1er. Que la Fraction $\frac{3}{49}$ doive être changée en Fraction décimale, & que le nombre des parties décimales de cette Fraction soit 4. Je commence par mettre quatre zéros après le Numérateur 3, & divise ensuite 30000 par 49, ce qui me donne pour quotient 612: mais considérant alors, qu'il y a eu quatre parties décimales dans le dividende, & aucune dans le diviseur, & par conséquent que quatre parties décimales doivent être retranchées du quotient, qui n'en a que trois, je pourvois à cet inconvénient en mettant un zéro à la gauche, & trouve pour quotient .0612.

Exemple 2d. Qu'il s'agisse de changer cette Fraction $\frac{7}{16}$ en Fraction décimale de même valeur, & qui ait, s'il est possible, six parties décimales: ici divisant 7 .000000 par 16, je trouve que le vrai quotient est .4375, & que les deux derniers caractéres du dividende sont inutiles.

N. B. Quand cette division est continuée à l'infini, il sera impossible d'ex-

d'exprimer le nombre cherché exactement par un nombre fini de termes; mais à mesure que le nombre de ces termes ira en augmentant, on pourra approcher du vrai quotient jusqu'à une différence plus petite qu'aucune qu'on voudra assigner.

Pour réduire les parties décimales d'un nombre entier à telles autres parties, dans lesquelles ce nombre est ordinairement divisé.

22. Pour expliquer cette règle, & en donner un exemple en même tems; qu'il y ait .345 d'une livre st. c'est-à-dire, trois cens quarante-cinq mille parties d'une livre st. qu'il faille réduire en schellings, sous & liards: j'observe d'abord, que comme un nombre quelconque de livres st. multiplié par 20, donne autant de schellings qu'il en faut pour égaler en valeur les livres st. de même un nombre quelconque de parties décimales d'une livre st. multiplié par 20, donnera autant de schellings & de parties décimales d'un schelling, qu'il en faut pour égaler en valeur les parties décimales d'une livre st. & de même rélativement aux sous & aux liards: multipliant donc .345 par 20, le produit est 6 & .900, ou 6 .9, ce qui signifie, que .345 d'une livre st. valent six schellings & neuf dixiémes d'un schelling, ce qui s'écrit ordinairement ainsi; 6 .9 schellings: ensuite, multipliant cette derniére partie décimale .9 par 12 pour les sous, je trouve que .9 d'un schelling valent 10 .8 de sou: enfin, multipliant .8 par 4 pour les liards, je trouve que .8 d'un sou sont égaux à 3 .2 de liard; pour ce qui est des .2 d'un liard, je les néglige, ne me souciant pas de porter plus loin une précision inutile; & trouve ainsi que .345 d'une livre st. montent à six schellings, dix sous & trois liards.

Pour réduire les différentes parties d'un entier en parties décimales équivalentes.

23. Cette réduction étant l'inverse de la précédente, devroit naturellement être faite par la division, comme l'autre l'a été par la multiplication; mais tout bien examiné, je ne sais pas si la méthode suivante ne sera point aussi facile à comprendre & à pratiquer qu'aucune autre que ce soit. On demande, par exemple, de réduire 2 heures, 34 minutes, 56 secondes, en parties décimales équivalentes d'un jour. Or dans un jour il y a 86400 secondes; & dans 2 heures, 34 minutes, 56 secondes, il y a 9296 secondes; par conséquent 2 heures, 34 minutes, 56 secondes, sont équivalentes à $\frac{9296}{86400}$ d'un jour: réduisez cette Fraction ordinaire, par le pénultiéme Article, à une Fraction décimale équivalente, & vous aurez .10759; d'où il suit que 2 heures, 34 minutes, &

& 56 secondes, sont équivalentes à un point avant le nombre, .10759 parties d'un jour. Mais il reste encore un point à ajuster; savoir, la quantité de parties décimales à laquelle la Fraction précédente doit être réduite, afin d'exprimer avec une précision suffisante les parties d'un jour à une seconde près. Pour résoudre cette question, je considére qu'une seconde est $\frac{1}{86400}$ d'un jour; ainsi je réduis $\frac{1}{86400}$ en Fraction décimale, au moins jusqu'à ce que je parvienne au premier caractére qui soit de quelque valeur, & que je trouve être .00001; d'où j'infére, que pour exprimer les parties d'un jour à une seconde près par quelque Fraction décimale, cette Fraction ne doit pas être composée de moins de 5 caractéres, à cause qu'il y en a 5 dans la Fraction décimale .00001. Pour se convaincre que la Fraction décimale marquée ci-dessus, savoir, .10759 exprime le tems proposé à une seconde près, il n'y a qu'à faire l'opération prescrite dans le dernier Article, & l'on trouvera que ce tems est 2 heures, 34 minutes, 55.8 secondes.

Pour avoir un autre exemple, prenons le contraire de celui du dernier Article, & proposons-nous de réduire six schellings, dix sous, 3.2 liards en parties décimales équivalentes d'une livre st. Une pareille livre contient 960 liards, ou 9600 dixiémes d'un liard; & 6 schellings, 10 sous 3.2 liards, sont équivalens à $\frac{3312}{9600}$ d'une livre; mais $\frac{1}{9600}$ étant réduit en Fraction décimale, est .0001 &c. où le premier caractére qui ait quelque valeur occupe la quatriéme place; c'est pourquoi je réduis la Fraction $\frac{3312}{9600}$ à quatre caractéres décimaux, qui sont .3450, c'est-à-dire, à .345 d'une livre; desorte que dans ce cas particulier, trois caractéres décimaux suffisent pour exprimer exactement la somme proposée.

De l'extraction de la racine quarrée en Fractions décimales.

24. Après avoir traité de la multiplication & de la division des Fractions décimales, il seroit assez inutile de nous étendre sur la règle de proportion, qui n'est, comme on l'a vu, qu'une maniére d'appliquer ces deux autres règles: ainsi nous passerons à l'Article de l'extraction de la racine quarrée, rélativement aux Fractions décimales. Il n'y a que très-peu de nombres quarrés, c'est-à-dire, dont la racine quarrée peut être tirée exactement, en comparaison des autres; & voilà pourquoi tout Arithméticien, quand on lui demande la racine quarrée de quelque nombre, doit commencer par déterminer la quantité de caractéres décimaux qu'il veut donner à la racine cherchée; après quoi annexant des caractéres décimaux, s'il le faut, à la droite du nombre proposé, il

il doit avoir soin qu'il y ait deux fois plus de ces caractéres qu'il n'a résolu de donner de caractéres décimaux à la racine cherchée ; ensuite, il faut qu'il plaçe un point au-dessus de l'endroit des unités, & puis sautant le caractére suivant, aussi un point sur le second caractére, & ainsi de suite, tant vers la droite, que vers la gauche : par ce moyen le nombre sera préparé, & la racine quarrée pourra se tirer comme d'un nombre entier, pourvu qu'on retranche de la racine, quand on l'aura, autant de caractéres décimaux qu'on avoit résolu auparavant de lui en donner.

Exemple 1e. On demande la racine de 2345 .6 avec une approximation de deux caractéres décimaux. Le nombre étant préparé, sera 2345 .6000, ou, marqué à la maniére d'un nombre entier, 23456000; & sa racine quarrée se trouvera être 4843 à peu près; & par conséquent 48 .43 sera la racine cherchée. Pour s'en assurer on n'a qu'à multiplier cette racine par elle-même, & les quatre premiers caractéres du quarré seront 2345, qui sont tous vrais; & il n'y en a pas d'autre vrai à attendre, à cause qu'il n'y a que quatre vrais caractéres dans la racine, & qu'on a négligé le reste; mais si, poussant la précision plus loin, on vouloit que la racine eût cinq caractéres, c'est-à-dire, autant qu'en a le quarré dont il est question de tirer la racine, on auroit 48 .431; ce nombre étant multiplié par lui-même, les cinq premiers caractéres du produit seront 2345 .6, c'est-à-dire le quarré même dont il s'agissoit d'extraire la racine quarrée.

Exemple 2d. On demande la racine de .0023456 en cinq caractéres décimaux. Après avoir mis un zéro dans la place des unités pour diriger la ponctuation, ainsi, 0 .0023456000 ; je tire la racine quarrée de 23456000 comme d'un nombre entier, & trouve qu'elle est 4843, comme auparavant : mais considérant que cette racine doit être abbaissée de cinq degrés, c'est-à-dire, ne doit consister qu'en cinq caractéres décimaux, je mets un zéro à la gauche, & par ce moyen j'ai pour racine 04843.

On peut démontrer, tant *à priori*, qu'*à posteriori*, que le quarré proposé doit avoir un nombre de caractéres décimaux double de celui qu'a la racine : *à priori*, parce qu'en tirant la racine quarrée, le quarré perd deux caractéres pour un que la racine gagne; & *à posteriori*, parce que la racine multipliée par elle-même doit produire le quarré; d'où il suit, par la nature de la multiplication, que le quarré doit avoir un nombre de caractéres décimaux double de celui qu'a la racine.

ELE-

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE I.

Définition de l'Algébre.

ART. I. JE n'ai pas dessein de commencer cet Ouvrage par un long détail historique touchant l'origine & les progrès de l'Algébre, & je passerai même sous silence l'étymologie de ce mot; ceux qui auront quelque curiosité à ces égards, pouvant consulter le Dr. *Wallis* & quelques autres. D'ailleurs, il est d'autant moins nécessaire d'entrer dans une discussion étymologique au sujet du nom d'Algébre, que cet Art a en quelque sorte changé de nature, & est fréquemment employé à des opérations Arithmétiques, qui ne répondent nullement à la signification de son nom. Je dirai donc simplement par voye de définition, que l'*Algébre*, dans le sens moderne du mot, *est l'Art de calculer par symboles*, c'est-à-dire, généralement parlant, par lettres de l'Alphabet. Car de tous les caractéres qu'on peut employer, il n'y en a aucun aussi commode que ces lettres, qui sont faciles à distinguer les unes des autres, tant à la vue, qu'en les entendant prononcer.

On substitue des lettres non seulement à la place des quantités qui sont inconnues, & par cela même telles, qu'on ne sauroit guéres les représenter autrement; mais aussi à des quantités connues, afin d'empêcher qu'on ne confonde celles-ci avec les premiéres, & de former des conclusions générales. Comme par exemple; supposons qu'on me demande deux nombres, dont la somme est 48 & la différence 14: en ce cas, si je mets seulement x, ou quelque autre lettre, à la place d'une des quantités inconnues, & que je me serve des nombres 48 & 14 tels que je les trouve dans le probléme, je n'arriverai qu'à cette conclusion particuliére, que le plus grand nombre est 31 & le plus petit 17: nombres qui répondent l'un & l'autre aux conditions du probléme. Mais si au lieu des nombres connus 48 & 14, je substitue les quantités générales a & b respectivement, & que je propose le probléme ainsi; *on demande deux nombres dont la somme est* a *& la différence* b: je parviendrai alors à cette conclusion générale, savoir, que *la moitié de la somme de* a *&* b *sera le plus grand nombre, & la moitié de leur différence le plus petit*: théoréme géné-

général, qui conviendra non seulement au cas mentionné ci-dessus, mais aussi à tous les autres cas possibles du problême en question. J'aurai occasion de marquer dans la suite de cet Ouvrage comment je parviens à ces deux conclusions, & indiquerai encore quelques autres avantages qui résultent de cette méthode de substituer des lettres à des quantités connues.

Ce que je viens de dire sur cet article, n'a d'autre but que d'aider à éclaircir la définition que j'ai donnée de l'Algébre, & de faire voir que des lettres y sont employées, moins pour désigner quelques quantités particuliéres comme telles, que pour marquer la rélation qu'elles ont entre elles dans quelque problême ou calcul. D'où l'on peut inférer, que les lettres représentent des quantités en Algébre, précisément comme elles représentent des personnes dans le train ordinaire de la vie, quand il s'agit de considérer distinctement un certain nombre de personnes, rélativement à quelque contract, ou à quelque procès.

N. B. Une quantité unique est quelquefois désignée par deux ou même par plus de deux lettres, quand on la considére comme le produit de la multiplication de ces lettres l'une par l'autre: c'est ainsi que ab est le produit de la multiplication de a & de b; & abc le produit de la multiplication de a par b, & de ab par c. Mais ceci sera expliqué plus clairement, quand nous serons parvenus à l'article de la multiplication.

Des Quantités affirmatives & négatives en Algébre.

2. Il y a deux sortes de quantités Algébraïques, les unes affirmatives, & les autres négatives Une quantité affirmative, est celle qui est plus grande que rien, & est reconnoissable à cette marque $+$; une quantité négative est moindre que rien, & est distinguée par la marque $-$: ainsi $+a$ signifie que la quantité a est affirmative, & doit se lire ainsi, plus a: $-b$ signifie que la quantité b est négative, & doit se lire, moins b.

La possibilité qu'une quantité soit plus petite que rien, paroît à bien des gens un grand paradoxe, pour ne pas dire une absurdité sans égale; & l'on ne sauroit nier que la chose ne fût ainsi, si nous supposions la possibilité qu'il y eût un corps, ou une substance moindre que rien. Mais on peut facilement concevoir des quantités, qui, après avoir été affirmatives, deviennent égales à rien, & ensuite négatives: c'est ainsi qu'on peut dire d'un homme, qu'il posséde 40000 livres, ou 20000, ou rien, ou bien qu'il a $-$ 20000, ou $-$ 40000; étant dans ces deux derniers cas, endetté de 20000 ou de 40000; on peut dire de même qu'un corps a 2 degrés de chaleur, ou un degré, ou aucun degré, ou $-$ un

degré, ou moins deux degrés: pareillement on peut dire, qu'un corps a deux degrés de vitesse vers en bas, ou un degré, ou aucun degré, ou — un degré, ou — 2 degrés &c. Il est certain que toutes les quantités contraires sont nécessairement susceptibles d'un état intermédiaire, qui tient également des deux extrêmes, & qu'on ne sauroit mieux représenter que par un zéro ou o; & si l'on peut dire que les degrés, comptés depuis l'un des deux côtés de cette limite commune sont plus grands que rien, je ne vois point pourquoi l'on ne diroit pas aussi bien que les degrés comptés depuis l'autre côté sont plus petits que rien, au moins en comparaison des premiers. Ce qui embarrasse le plus sur cet article les esprits bornés, est, que dans le stile ordinaire, la plupart des quantités perdent leurs noms quand elles cessent d'être affirmatives, & prennent de nouveaux noms en devenant négatives: c'est ainsi que nous appellons des biens négatifs, dettes; un gain négatif, perte; une chaleur négative, froid &c. & véritablement dans ce sens, on doit avoir peine à concevoir comment une quantité peut être plus petite que rien, c'est-à-dire, comment une quantité désignée par un nom comme étant quelque chose de réel, peut, dans ce même tems, être considérée comme moindre que rien. Mais la question est proprement, si, de deux quantités contraires désignées par deux noms différens, une quantité sous un nom ne peut pas être appellée plus petite que rien, étant comparée avec l'autre quantité, quoique cette derniére porte un nom différent; si l'on ne peut pas dire, que tel degré de froid est éloigné de tel degré de chaleur plus que n'en est éloignée la tiedeur, quantité intermédiaire entre la chaleur & le froid. Les difficultés qui naissent de ce que des quantités illimitées en elles-mêmes sont désignées par des noms dont la signification est bornée, doivent être imputées à ces noms, & non pas aux choses, comme je l'ai remarqué dans une autre occasion. Voyez l'Introduction Art. 11. En Algébre, où les quantités doivent être considérées d'une maniére abstraite, sans aucun égard aux degrés de grandeur, les noms des quantités s'étendent aussi loin que les quantités mêmes; de sorte que toutes les quantités qui différent seulement l'une de l'autre en degré, quelque opposées qu'elles puissent être l'une à l'autre, passent sous le même nom; & les quantités, tant affirmatives que négatives, sont uniquement distinguées par leurs signes, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, & point par leurs noms, une même lettre représentant la même quantité affirmée & niée. D'où il suit, qu'en Algébre les signes emportent avec eux la même distinction, que font les particules & les adjectifs dans le stile ordinaire, comme dans les mots d'habile & d'inhabile, d'heu-

d'heureux & de malheureux, de bonne santé & de mauvaise santé, &c.

Comme ces quantités affirmatives & négatives sont contraires l'une à l'autre par leur nature, elles le sont pareillement dans leurs effets: considération, qui seule suffit pour ôter toutes les difficultés concernant les signes que l'addition, la soustraction, la multiplication & la division donnent aux quantités: car le résultat de ces différentes opérations sur des quantités affirmatives étant connu, on peut connoître celui des mêmes opérations sur des quantités négatives par la règle des contraires.

Avant d'aller plus loin, il sera bon d'avertir, que toute quantité qui n'est précédée d'aucun signe, doit toujours être considérée comme affirmative, & que si elle n'a devant elle aucun coëfficient numérique, l'unité doit toujours être sousentendue: ainsi $2a$ signifie $+2a$, & a signifie $1a$ ou $+1a$.

Par le coëfficient numérique d'une quantité, j'entends le nombre entier ou rompu par lequel cette quantité est multipliée: ainsi $2a$ signifie deux fois a, ou la quantité a prise deux fois, & le coëfficient est 2; $\frac{3}{4}a$, ou $\frac{3a}{4}$, signifie $\frac{3}{4}$ de la quantité a, & le coëfficient est $\frac{3}{4}$.

N. B. Le signe d'une quantité négative n'est jamais ômis, non plus que celui d'une quantité affirmative, à moins qu'on ne considére celle-ci en elle-même, ou qu'il n'arrive qu'elle soit la premiére dans une série de quantités qui se suivent l'une l'autre. Par exemple, on ne dit guéres la quantité $+a$, mais la quantité a; ni la série $+a-b-c+d$, mais la série $a-b-c+d$. Nous allons donner à-présent les règles qu'il faut observer dans les différentes opérations qu'on fait sur les quantités Algébraïques.

De l'Addition des Quantités Algébraïques.

3. Cet Article sera partagé en divers paragraphes.

1°. Toutes les fois que deux ou plus de deux quantités de même dénomination, & qui sont précédées du même signe, doivent être ajoûtées ensemble, écrivez la somme de leurs coëfficiens numériques en mettant au-devant de cette somme le signe commun, & le Dénominateur commun après elle: ainsi $+2a$ & $+3a$ ajoûtés ensemble font $+5a$, par la même raison que 2 douzaines & 3 douzaines ajoûtées ensemble font 5 douzaines: de même $-3ab$ $-4ab$ $-5ab$ ajoûtés ensemble font $-12ab$; précisément comme plusieurs dettes ajoûtées ensemble forment une plus grande dette.

2°. Si deux quantités de même dénomination, qui sont précédées de diffé-

différens signes, doivent être ajoûtées ensemble, écrivez simplement la différence de leurs coëfficiens numériques avec le Dénominateur commun après elle, & au-devant le signe de la plus grande quantité: car en ce cas, les quantités qui doivent être ajoûtées, étant contraires l'une à l'autre, la plus petite quantité, de quelque côté qu'elle soit, détruira dans l'autre une quantité égale à celle qui est exprimée par son propre coëfficient. Ainsi $+5a$ ajoûtés à $-2a$ font $+3a$, comme si quelqu'un me devoit 5000 livres pour certaine chose, & que je lui en dusse 2000 pour une autre, il me resteroit redevable de 3000. Si l'on m'objecte, que c'est-là une soustraction, & pas une addition, je réponds que l'addition de $-2a$ produit toujours le même effet que la soustraction de $+2a$: mais je nie que l'addition de $-2a$ soit la même, ou produise le même effet que la soustraction de $-2a$. Voici quelques autres exemples de ce même cas: $+7a$ ajoûtés à $-7a$ donnent 0; $+3a$ ajoûtés à $-12a$ donnent $-9a$; $+a$ ajoûté à $-5a$ donne $-4a$; $+5a$ ajoûtés à $-a$ donnent $+4a$; $+\frac{1}{3}a$ ajoûté à $-\frac{1}{4}a$ donne $\frac{1}{12}a$, &c.

3°. Quand plusieurs quantités de même dénomination doivent être ajoûtées ensemble, & que les unes sont affirmatives & les autres négatives, il faut commencer par les réduire au nombre de deux, en faisant une somme de toutes les quantités affirmatives, & une autre somme de toutes les quantités négatives, & puis ajoûter ces deux sommes ensemble, comme il a été dit dans le dernier paragraphe. Ainsi $+10a-9a+8a-7a$, ajoûtés ensemble, font $2a$; car $+10a$ & $+8a$ font $+18a$, & $-9a$ & $-7a$ font $-16a$; & $+18a$ & $-16a$ font $+2a$.

4°. Des quantités de différentes dénominations ne sauroient former un même tout, & par conséquent ne peuvent être ajoûtées qu'en les plaçant dans l'ordre qu'on juge à propos l'une après l'autre, en les faisant précéder de leurs signes propres, à l'exception de la premiére, dont on peut ômettre le signe, en cas qu'elle soit affirmative. Ainsi $+2a$ & $-3b$ & $+4c$ & $-5d$, étant ajoûtés ensemble, font $2a-3b+4c-5d$; de même a & b ajoûtés ensemble font $a+b$; & de-là vient que toutes les fois qu'on trouve entre deux quantités le signe $+$, cela signifie la somme qui résulte de l'addition de ces deux quantités: par exemple, si a est 7 & que b soit 3, $a+b$ sera 10: mais si $-b$ devoit être ajoûté à la quantité a, la somme devroit s'écrire ainsi, $a-b$; car ajoûter $-b$ est la même chose que soustraire $+b$.

5°. Des quantités Algébraïques, dont les membres sont tous de différentes dénominations, ne sauroient pareillement être ajoûtées d'aucune autre maniére qu'en les plaçant l'une après l'autre sans changer leurs signes:

gnes: ainſi $3a + 4b$ ajoûtés à $5c - 6d$ ne peuvent faire que $3a + 4b + 5c - 6d$. Que ſi les membres ne ſont pas tous de différentes dénominations, il ſera bon alors de plaçer une quantité compoſée au-deſſous de l'autre de même eſpéce, autant que faire ſe pourra, comme dans les exemples ſuivans:

$$\begin{array}{l} a + b \\ a - b \\ \hline 2a \;\; * . \ddagger \end{array}$$

‡ Car a & a ajoûtés enſemble font $2a$; & $+b$ & $-b$ ajoûtés enſemble s'entre-détruiſent, & font ainſi o ou *: caractére dont on ſe ſert toujours en Algébre pour déſigner une plaçe vuide..

$$\begin{array}{l} 2x - 3a + 4b - 5c + 6d - 7e \quad * \\ 10x + 9a - 8b - 7c - 6d \quad * - 5f \\ \hline 12x + 6a - 4b - 12c \quad * - 7e - 5f. \end{array}$$

N. B. Dans l'addition, la ſouſtraction & la multiplication des quantités Algébraïques compoſées, il n'importe guéres ſi l'opération ſe fait de la gauche à la droite, ou de la droite à la gauche, ce qui n'eſt point vrai de la diviſion.

De la Souſtraction des Quantités Algébraïques.

4. Toutes les fois qu'une quantité Algébraïque ſimple doit être retranchée d'une autre quantité ſimple ou compoſée, il faut commencer par changer le ſigne de la quantité qu'il s'agit de retrancher, c'eſt-à-dire, en cas qu'elle ſoit affirmative, il faut la faire, ou du-moins la nommer négative, & réciproquement, & puis l'ajoûter ainſi changée à l'autre quantité: car puiſque (comme nous l'avons indiqué ci-deſſus) ſouſtraire une quantité d'une autre, eſt réellement la même choſe qu'ajoûter cette quantité en la faiſant précéder d'un ſigne contraire; & puiſque changer le ſigne de la quantité qu'on veut retrancher, rend cette quantité préciſément contraire à ce qu'elle étoit auparavant, il eſt manifeſte qu'après un pareil changement elle peut être ajoûtée à l'autre, & que le réſultat de cette addition ſera le même que celui de la ſouſtraction propoſée. Ainſi la règle de ſouſtraction, en changeant le ſigne de la quantité qu'il s'agit de ſouſtraire, peut toujours être changée en celle d'addition, tout comme la règle de diviſion en fractions ſe change en celle de multiplication, pourvu que le Numérateur devienne le Dénominateur, & réciproquement. Comme par exemple, $+b$ ſouſtrait de a laiſſe $a-b$, à cauſe que $-b$ ajoûté à a fait $a-b$; deſorte que $a-b$ peut être conſidéré ou comme la ſomme de a & de $-b$ ajoûtés enſemble, ou comme ce qui reſte après que $+b$ aura été ſouſtrait de a, ou comme la différence entre a &

& b, ou comme l'excès de a par dessus b, ces différentes expressions désignant parfaitement la même chose : comme si a signifioit 7, & b 3, $a-b$ marqueroit 4, & ainsi du reste.

La règle de soustraction donnée ici est universelle, quoiqu'il ne soit pas toujours nécessaire d'y avoir recours : car supposé qu'il faille soustraire $3a$ de $7a$, on voit du premier coup d'œil qu'il doit rester $4a$, précisément comme soixante étant soustraits de cent quarante, il reste quatre-vingts.

Voici encore quelques autres exemples de Soustraction Algébraïque.

1°. $7a$ soustraits de $5a$ laissent $-2a$, à cause que $-7a$ ajoûtés à $+5a$ font $-2a$, par le 2d. paragraphe du dernier Article.

2°. $9a$ soustraits de 0 laissent $-9a$, à cause que $-9a$ ajoûtés à 0 font $-9a$.

3°. $12a$ soustraits de $-3a$ laissent $-15a$, à cause que $-12a$ ajoûtés à $-3a$ font $-15a$, par le premier paragraphe du dernier Article.

4°. $-3a$ soustraits de $-8a$ laissent $-5a$, à cause que $+3a$ ajoûtés à $-8a$ font $-5a$.

5°. $-7a$ soustraits de $-3a$ laissent $+4a$, à cause que $+7a$ ajoûtés à $-3a$ font $+4a$.

6°. $-6a$ soustraits de 0 laissent $+6a$, à cause que $+6a$ ajoûtés à 0 font $+6a$.

7°. $-5a$ soustraits de $+5a$ laissent $+10a$, à cause que $+5a$ ajoûtés à $+5a$ font $+10a$.

8°. $-b$ soustrait de a laisse $a+b$, à cause que $+b$ ajoûté à a fait $a+b$, par le 4ème. paragraphe du dernier Article.

9°. -2 soustraits de 7 laissent 9, à cause que $+2$ ajoûtés à 7 font 9.

Il paroît par le premier de ces exemples, qu'on peut retrancher une plus grande quantité d'une plus petite, mais qu'alors le reste sera négatif; précisément comme un joueur qui n'a que cinq guinées peut en perdre sept, après quoi il restera à sa charge une dette de deux guinées. Il paroît par le dernier exemple, que -2 soustraits de 7 laissent 9, c'est-à-dire, que si l'on soustrait une quantité négative d'une autre quantité affirmative, cette derniére, bien loin d'éprouver par-là quelque diminution, sera au contraire augmentée: principe un peu dur à digérer pour ceux qui ont la compréhension foible. Je tâcherai cependant de leur en faciliter l'intelligence par les considérations suivantes.

1ment. Dans toute soustraction, si le reste & le plus petit nombre ajoûtés ensemble, sont égaux au plus grand nombre, la soustraction est juste:

te: mais dans le cas présent, le reste 9 ajoûté au plus petit nombre -2 est égal au plus grand nombre 7: donc -2 soustraits de 7 laissent 9.

2ment. Dans toute soustraction, le reste est la différence entre le plus grand nombre & le plus petit; mais la différence entre $+7$ & -2 est 9: donc -2 soustraits de 7 laissent 9.

3ment. Le nombre de 7 est égal à $\overline{9-2}$ par le second paragraphe du dernier Article; ainsi -2 soustraits de 7 auront le même reste que -2 soustraits de $\overline{9-2}$: mais -2 soustraits de $\overline{9-2}$ laissent 9: donc -2 soustraits 7 laissent 9. En un mot, ôter une négation, dans quelque cas que ce soit, revient au même qu'ajoûter quelque chose de réel: comme quand une Terre est chargée de quelque redevance, la valeur de la Terre augmente par cela même que la redevance est ôtée.

4ment. Moins on ôte de 7 plus il restera: si on n'en ôte rien, il restera 7: donc si on ôte moins que rien, il doit rester plus que 7.

5ment. Si après tout ce que nous venons de dire, ou peut-être après tout ce qu'il est possible de dire sur cette matiére, qui a quelque chose d'abstrait, il reste encore des scrupules, servons-nous du principe avancé ci-dessus, & voyons ce qu'il nous donnera. Qu'il faille soustraire la quantité composée $a-2$ de la quantité composée $6a+7$: pour cet effet, je place a sous $6a$ & -2 sous 7, après quoi je dis; a étant soustrait de $6a$, il reste $5a$; -2 de 7, & (si notre assertion est vraie) il reste 9; ainsi la somme totale est $5a+9$. Cela étant, j'en appelle à tout homme qui a le sens-commun, si cette soustraction n'est pas juste: car il est certain que si l'on soustrait a de $6a+7$, le reste sera $5a+7$; & par cela même il n'y a pas le moindre lieu de douter, que si l'on soustrait $a-2$, quantité plus petite que la premiére de 2, le reste ne soit plus grand de 2, c'est-à-dire, égal à $5a+9$.

Autres exemples de Soustraction de Quantités Algébraïques composées.

$a+b$	‡ Ainsi $7-3$, ou 4, soustraits de $7+3$,	$*+12$
$a-b$	ou 10, laissent deux fois 3, ou 6.	$3a+7$
$*+2b$ ‡		$-3a+5.$

De	$12x+6a-4b-12c \quad * -7e-5f$
Otez	$2x-3a+4b-5c+6d-7e \quad *$
Reste	$10x+9a-8b-7c-6d \quad * -5f$
Preuve	$12x+6a-4b-12c \quad * -7e-5f.$

Si aucun des membres de la quantité qu'il s'agit de soustraire ne se trouve être de même dénomination qu'aucun membre de la quantité dont

dont la souſtraction doit ſe faire, changez le ſigne de chaque membre de la premiére de ces quantités, & ajoûtez le tout ainſi changé à l'autre quantité. Comme ſi $5c - 6d$ devoient être ſouſtraits de $3a - 4b$, commencez par changer $5c - 6d$ en $-5c + 6d$, & puis ajoûtez cette quantité à l'autre, & vous aurez $3a - 4b - 5c + 6d$, pour reſte de la ſouſtraction.

De la Multiplication des Quantités Algébraïques.

Et premiérement, comment les ſignes du Multiplicateur & du Multiplicande étant donnés, on trouve le ſigne du produit.

5. Avant de paſſer à la Multiplication des quantités Algébraïques, nous obſerverons, que ſi les ſignes du Multiplicateur & du Multiplicande ſont les mêmes, c'eſt-à-dire, tous deux affirmatifs, ou tous deux négatifs, le produit eſt affirmatif; mais négatif, ſi les ſignes ſont différens: ainſi $+4$ multipliés par $+3$, ou -4 par -3 donnent, dans l'un & l'autre cas, $+12$; mais -4 multipliés par $+3$, ou $+4$ par -3, donnent dans les deux cas -12.

Si le Lecteur s'attend à une démonſtration de cette règle, il doit avant tout être averti de deux choſes: 1°. qu'on appelle progreſſion Arithmétique toute ſuite de nombres qui croiſſent ou décroiſſent avec d'égales différences, comme 0, 2, 4, 6; ou 6, 4, 2, 0; comme auſſi $3, 0, -3$; $4, 0, -4$; $12, 0, -12$; ou $-12, 0, +12$: d'où il ſuit, qu'il faut au-moins trois termes pour former une progreſſion Arithmétique; & que ſi les deux premiers termes de la progreſſion ſont connus, le troiſiéme ſe trouve aiſément. Par exemple, ſi les deux premiers termes étoient 4 & 2, le ſuivant ſeroit 0; ſi les deux premiers étoient 12 & 0, le ſuivant ſeroit -12; ſi les deux premiers étoient -12 & 0, le ſuivant ſeroit $+12$, &c.

2°. Si une ſuite de nombres en progreſſion Arithmétique, comme 3, 2 & 1, eſt ſucceſſivement multipliée par un Multiplicateur commun, tel que 4, ou ſi un ſimple nombre, tel que 4, eſt ſucceſſivement multiplié par chaque nombre d'une ſuite en progreſſion Arithmétique, comme 3, 2 & 1, les produits 12, 8 & 4, formeront auſſi une progreſſion Arithmétique.

Cela étant, la règle, dont nous devons donner la démonſtration, ne peut avoir lieu que dans quatre cas.

1ment. Celui où $+4$ multipliés par $+3$ donnent $+12$.

2ment. Celui où -4 multipliés par $+3$ donnent -12.

3ment. Celui où $+4$ multipliés par -3 donnent -12.

Et

Et enfin, celui où -4 multipliés par -3 donnent $+12$. L'expression générale & abrégée de ces quatre cas eſt : premiérement $+$ par $+$ donne $+$; ſecondement $-$ par $+$ donne $-$; en troiſiéme lieu $+$ par $-$ donne $-$; enfin $-$ par $-$ donne $+$.

1er. Cas. Que $+4$ multipliés par $+3$ font $+12$, eſt une choſe qui n'a pas beſoin de démonſtration; ou ſi elle en avoit beſoin, il ſuffiroit de jetter les yeux ſur le premier paragraphe du 3éme. Article; car multiplier $+4$ par $+3$ eſt la même choſe qu'ajoûter $4+4+4$ en une ſomme; mais $4+4+4$ ajoûtés en une même ſomme donnent $+12$; donc $+4$ multipliés par $+3$, donnent $+12$.

2d Cas. On prouvera de même par le ſecond paragraphe du 3éme. Article, que -4 multipliés par $+3$ donnent -12: mais j'ai deſſein de prouver ici la même vérité d'une autre maniére: multipliez les termes de cette progreſſion Arithmétique $4, 0, -4$, par $+3$, & les produits ſeront en progreſſion Arithmétique, comme ci-deſſus: or les deux premiers produits ſont 12 & 0; donc le troiſiéme ſera -12; donc -4 multipliés par $+3$, font -12.

3éme. Cas. Pour prouver que $+4$ multipliés par -3 font -12, multipliez $+4$ ſucceſſivement par $+3$, 0 & -3, & les produits ſeront en progreſſion Arithmétique; mais les deux premiers produits ſont 12 & 0; donc le troiſiéme ſera -12; & le produit de $+4$ par -3 égal à -12.

4éme Cas. Enfin, pour démontrer que -4 multipliés par -3 font $+12$, multipliez -4 par 3, 0 & -3 ſucceſſivement, & les produits ſeront en progreſſion Arithmétique, mais les deux premiers produits ſont -12 & 0, par le ſecond cas; donc le troiſiéme produit ſera $+12$; donc -4 multipliés par -3 font $+12$.

Caſ 2d. $\begin{array}{r} +4, \quad 0, -4 \\ +3, +3, +3 \\ \hline -12, \quad 0, -12 \end{array}$ *Caſ* 3éme. $\begin{array}{r} +4, +4, +4 \\ +3, \quad 0, -3 \\ \hline +12, \quad 0, -12 \end{array}$

Caſ 4éme. $\begin{array}{r} -4, -4, -4 \\ +3, \quad 0, -3 \\ \hline -12, \quad 0, +12 \end{array}$

Ces quatre cas peuvent ſe démontrer plus briévement ainſi: $+4$ multipliés par $+3$ font $+12$; donc -4 par $+3$, ou $+4$ par -3 doivent produire quelque choſe de contraire à $+12$, c'eſt-à-dire -12; mais ſi -4 multipliés par $+3$ produiſent -12, alors -4 multipliés par -3 doi-

vent produire quelque chose de contraire à -12, c'est-à-dire, $+12$; si bien que ce dernier cas, qui fait tant de peine aux commençans, n'est après tout qu'un principe admis par tous ceux qui ont quelque idée de Grammaire, savoir, que deux négatives affirment *.

De la Multiplication des Quantités Algébraïques simples.

6. La Multiplication des Quantités Algébraïques simples se fait, premiérement en multipliant l'un par l'autre les coëfficiens numériques, & puis en mettant, après le produit, toutes les lettres qui composent les quantités à multiplier, le signe (quand il le faut) étant placé au-devant du produit, comme nous l'avons marqué ci-dessus. Ainsi $4b$ multipliés par $3a$ donnent $12ab$.

Quoique ce langage (car c'en est un) soit, comme tous les autres, purement arbitraire, j'ose dire qu'il n'est pas possible d'en inventer quelque autre mieux imaginé. C'est ce qui paroîtra par les considérations suivantes. Si quelque quantité comme b, doit être multipliée par un nombre, comme 2, 3, ou 4, le produit ne sauroit être mieux représenté que par $2b$, $3b$, $4b$, &c.; c'est pourquoi si b doit être multiplié par a, le produit sera bien désigné par ab: mais si b multiplié par a produit ab, il s'ensuit que $4b$ multipliés par a, doivent donner un produit quatre fois plus grand, c'est-à-dire, $4ab$; enfin, si $4b$ multipliés par a donnent $4ab$, il faut que $4b$ multipliés par $3a$, donnent un produit 3 fois plus grand, c'est-à-dire, $12ab$.

De-là vient, que toutes les fois qu'on trouve en Algébre deux ou plus de deux lettres jointes ensemble, comme elles le font quand elles forment un mot, c'est-à-dire, sans qu'il y ait rien qui les sépare, ces lettres marquent le produit de la multiplication des quantités qu'elles représentent: ainsi ab signifie le produit de a & de b multipliés l'un par l'autre: de même aa signifie le produit de a multiplié par lui-même, ou le quarré de a, & point $2a$. Ce qui fait voir que celui qui ne trouve aucune différence entre $2a$ & aa, est précisément aussi habile que celui qui confondroit 2 douzaines avec 12 fois 12.

Il n'importe guéres en quel ordre on place les lettres dans un produit; car ab & ba ne différent pas davantage l'un de l'autre, que 3 fois 4, & 4 fois 3: cependant il est bon d'observer à cet égard une espéce de méthode, afin de ne pas prendre des quantités pareilles pour dissemblables; pour

* Voici une autre maniére très-simple d'envisager la chose. Le premier cas contient une affirmation affirmée; le second une négation affirmée; le troisiéme une affirmation niée; & le dernier une négation niée.

pour cet effet, il conviendra d'assigner aux lettres d'un produit le même ordre qu'elles occupent dans l'Alphabet, excepté quand quelque quantité inconnue est multipliée par une quantité connue, celle-ci devant précéder l'autre en ce cas.

N. B. La signification de cette marque $\times$ a été expliquée vers la fin de l'Art. 7. de l'Introduction. Pour ce qui est de la marque $=$, elle indique l'égalité, & donne à connoître que les quantités entre lesquelles elle se trouve, sont égales l'une à l'autre: ainsi $2 \times 6 = 3 \times 4 = 12$ signifient; 2×6 sont égaux à 3×4 égaux à 12: ou bien, le nombre 2×6 est égal à 3×4, c'est-à-dire, égal à 12.

Exemples de Multiplication Algébraïque simple.

1er. $4ab \times 5a = 20aab$. 2d. $-5ab \times 6bc = -30abbc$.
3éme. $6ac \times -7bd = -42abcd$. 4éme. $-7a \times -b = +7ab$.
5éme. $x \times 3x = 3xx$. 6éme. $-x \times -x = +xx$.
7éme. $-5ab \times +3 = -15ab$. 8éme. $\frac{2}{3}a \times \frac{4}{5}b = \frac{8}{15}ab$.

Distinctions à faire entre l'Addition & la Multiplication.

Pour que le jeune Algébriste ne confonde pas des opérations aussi différentes que l'Addition & la Multiplication, comme cela n'arrive que trop souvent, j'indiquerai ici quelques marques distinctives, qu'il fera bien de graver dans sa mémoire:

Comme 1ment, a ajoûté à a fait $2a$, mais $a \times a$ fait aa.
2ment, $a + 0$ fait a, mais a multiplié par 0 fait 0.
3ment, a ajoûté à $-a$ fait 0, mais a multiplié par $-a$ fait $-aa$.
4ment, $-a$ ajoûté à $-a$ fait $-2a$, mais $-a$ multiplié par $-a$ fait $+aa$.
5ment, a ajoûté à 1 fait $a+1$, mais a multiplié par 1 fait a.
6ment, $2a$ ajoûtés à $-3b$ font $2a-3b$, mais $2a$ multipliés par $-3b$ font $-6ab$.

J'ajoûterai ici quelques équations, qui pourront aider ceux, qui en feront le calcul, à s'accoutumer aux premiers élémens du langage des Algébristes. Supposons $a = 7$, & $b = 3$: en ce cas nous aurons 1°, $a + b = 10$. 2°, $a - b = 4$. 3°, $4a + 5b = 43$. 4°, $4a - 5b = 13$. 5°, $aa = 49$. 6°, $ab = 21$. 7°, $bb = 9$. 8°, $aaa = 343$. 9°, $aab = 147$. 10°, $abb = 63$. 11°, $bbb = 27$. 12°, $aa + 2ab + bb = 49 + 42 + 9 = 100$. 13°, $aa - 2ab + bb = 49 - 42 + 9 = 16$. 14°, $aaa + 3aab + 3abb + bbb = 343 + 441 + 189 + 27 = 1000$. 15°, $aaa - 3aab + 3abb - bbb = 343 - 441 + 189 - 27 = 64$.

Des Puissances & de leurs exposans.

7. Toutes les fois qu'en multiplication une lettre doit être marquée plus qu'une fois, on écrit la lettre avec un nombre en petit caractére vers la droite de la lettre: ce nombre indique combien de fois la lettre est prise; ainsi au-lieu de xx on écrit x^2, au-lieu de xxx, x^3, au-lieu de $xxxx$, x^4, *&c.* Ces produits s'appellent les puissances de x; les caractéres qui représentent le nombre des répétitions, s'appellent les exposans de ces puissances; & la quantité x, dont toutes ces puissances tirent leur origine, s'appelle la racine de ces puissances, ou la premiére puissance de x; x^2 se nomme la seconde puissance de x; x^3 la troisiéme puissance; x^4 la quatriéme puissance, *&c.* *Viete*, *Ougthred*, & quelques autres Analystes, au-lieu de petites lettres, employoient des lettres capitales, & au-lieu d'exposans numériques distinguoient ces puissances par des noms: ainsi *Viete* en particulier, appelloit x^2, *X quarré*; x^3, *X cube*; x^4, *X quarré-quarré*; x^5, *X quarré-cube*; x^6, *X cube-cube*; x^7, *X quarré-quarré-cube*, &c. noms qu'*Ougthred* a abrégés, en les écrivant ainsi; Xq, Xc, Xqq, Xqc, Xcc, $Xqqc$, *&c.* mais ces noms ne sont presque plus en usage, excepté les deux premiers, quand on les applique à une ligne élevée à la seconde ou à la troisiéme puissance.

Si nous supposons $x=5$, nous aurons $2x=10$, $x^2=25$, $3x=15$, $x^3=125$, $4x=20$, $x^4=625$, *&c.*

La multiplication de ces puissances est facile: ainsi $x^2 \times x^3 = x^5$, à cause que $xx \times xxx = xxxxx$: ce qui fait voir, que l'addition des exposans répond toujours à la multiplication des puissances, pourvu que ce soient les puissances de la même quantité; car comme $2+3=5$, ainsi $x^2 \times x^3 = x^5$, *&c.* mais si c'étoient les puissances de différentes quantités, leurs exposans ne devroient point être ajoûtés: ainsi $a^2 \times x^3 = a^2x^3$, & $a^2x^3 \times a^4x^5 = a^6x^8$. Et il faut observer ici, que si un nombre se trouve entre deux lettres, c'est toujours à la premiére lettre qu'il faut le rapporter: ainsi a^2x^3 ne signifie point $a \times 2x^3$, mais $a^2 \times x^3$.

La Multiplication des Nombres irrationels.

8. Cette marque $\surd$ désigne la racine quarrée du nombre au devant duquel elle est placée, & se met ordinairement au devant d'un nombre dont la racine quarrée ne sauroit s'exprimer autrement, soit en nombres entiers, ou en fractions: ainsi $\surd 2$ signifie la racine quarrée de 2; $\surd a$ la racine quarrée de a, *&c.* Ces racines s'appellent ordinairement racines sourdes, ou racines irrationelles, à cause que leur raison à l'unité ne sauroit être exprimée en nombres.

Toutes

Toutes les fois que deux nombres fourds doivent être multipliés ensemble, la voye la plus abrégée eft de multiplier l'un par l'autre les nombres eux-mêmes, fans aucun égard à leur figne radical, & puis de mettre le figne radical au devant du produit. Ainfi s'il étoit queftion de multiplier la $\sqrt{a}$ par $\sqrt{b}$, le produit feroit $\sqrt{ab}$; ce que je prouve ainfi: Soit $\sqrt{a}=x$, & $\sqrt{b}=y$; en ce cas $x^2=a$, & $y^2=b$, & $x^2y^2=ab$, & $xy=\sqrt{ab}$; mais xy, ou $x \times y=\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ par la fuppofition; donc $\sqrt{a} \times \sqrt{b}=\sqrt{ab}$. Ainfi $\sqrt{2} \times \sqrt{3}=\sqrt{6}$.

Ces multiplications font d'un grand ufage non feulement dans des matiéres de fpéculation, mais auffi dans la pratique: car fi je devois, par exemple, multiplier la racine quarrée de 2 par la racine quarrée de 3, & que je n'euffe point cette régle, je devrois premiérement extraire la racine de 2, avec le degré de précifion que je croirois convenir le mieux à mon deffein; il faudroit enfuite faire la même opération à l'égard de la racine de 3; & enfin multiplier les deux racines l'une par l'autre, avant de pouvoir obtenir le nombre cherché; mais dès que je fais que $\sqrt{2} \times \sqrt{3}=\sqrt{6}$, toute l'opération fe trouve réduite à la feule extraction de la racine de 6: & il arrive même quelquefois, que les deux racines, quoique l'une & l'autre irrationelles, donnent un produit rationel: ainfi $\sqrt{2} \times \sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ & la $\sqrt{ab^2} \times \sqrt{ac^2}=\sqrt{a^2b^2c^2}=abc$.

De la Multiplication des Quantités Algébraïques compofées.

9. La multiplication des Quantités Algébraïques compofées fe fait premiérement en multipliant le Multiplicande par chaque membre particulier du Multiplicateur, & puis en marquant le produit de la maniére la plus fimple.

Comme par exemple; on demande de multiplier cette quantité compofée $6x-7a-8b$ par cette autre quantité compofée $2x-3a+4b$: ayant écrit le Multiplicateur au-deffous du Multiplicande, & commençant à la gauche (quoique l'opération puiffe auffi fe faire dans l'autre fens) je multiplie le Multiplicande entier par $2x$, premier membre de mon Multiplicateur, & le produit eft $12xx-14ax-16bx$, que j'écris tout de fuite: je multiplie après cela le Multiplicande par $-3a$, membre fuivant du Multiplicateur, & le produit eft $-18ax+21aa+24ab$, dont je place le premier membre $-18ax$ au-deffous des $-14ax$ déjà trouvés, pour ajoûter enfuite plus aifément enfemble ces deux quantités, qui font de même dénomination; je place le refte, favoir $+21aa$ $+24ab$ dans la premiére ligne; après quoi je multiplie par $4b$ le dernier membre du Multiplicateur, & le produit eft $24bx-28ab-32bb$,

 dont

dont je mets $24bx$ au-dessous de $-16bx$ & $-28ab$ sous $+24ab$, & le dernier membre $-32bb$, je le mets dans la premiére ligne, à cause que je n'ai aucune autre quantité qui lui réponde: enfin je marque de la maniére la plus simple tout le produit, qui se trouve être: $12xx-32ax+8bx+21aa-4ab-32bb$. Voyez l'opération;

$$\begin{array}{l} 6x-7a-8b \\ 2x-3a+4b \\ \hline 12xx-14ax-16bx+21aa+24ab-32bb \\ \quad -18ax+24bx \qquad -28ab \\ \hline \end{array}$$

Somme $12xx-32ax+8bx+21aa-4ab-32bb$.

Exemple 2.

$$\begin{array}{l} 3x+4a-5b \\ 3x-4a+5b \\ \hline 9xx+12ax-15bx-16aa+20ab-25bb \\ \quad -12ax+15bx \qquad +20ab \\ \hline 9xx \quad * \quad * \quad -16aa+40ab-25bb. \end{array}$$

Exemple 3.

$$\begin{array}{l} 6xx-7ax+8aa \\ 2xx-3ax+4aa \\ \hline 12x^4-14ax^3+16a^2x^2-24a^3x+32a^4 \\ \quad -18ax^3+21a^2x^2-28a^3x \\ \qquad +24a^2x^2 \\ \hline 12x^4-32ax^3+61a^2x^2-52a^3x+32a^4. \end{array}$$

Exemple 4.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline aa+ab-bb \\ \quad -ab \\ \hline aa \quad * \quad -bb. \end{array}$$

Exemple 5.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+bb \\ \quad +ab \\ \hline aa+2ab+bb. \end{array}$$

Exemple 6.

$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline aa-ab+bb \\ \quad -ab \\ \hline aa-2ab+bb. \end{array}$$

N. B.

N. B. Un trait au-dessus de deux ou de plus de deux quantités, signifie que toutes ces quantités doivent être considérées comme ne formant ensemble qu'une seule quantité composée: ainsi $\overline{a+b} \times \overline{c-d}$ ne signifie point la quantité qui résulte de la multiplication de $b \times c$, en ajoûtant ensuite $a-d$ au produit, comme on pourroit se l'imaginer s'il n'y avoit point de trait; mais le sens en est, qu'il faut multiplier toute la quantité $\overline{a+b}$ par toute la quantité $\overline{c-d}$.

La preuve de la Multiplication composée.

10. Dans le troisiéme exemple nous avons multiplié $\overline{6xx-7ax+8aa}$ par $2xx-3ax+4aa$, & trouvé que le produit étoit $12x^4-32ax^3+61a^2x^2-52a^3x+32a^4$. Voyons comment la chose réussira en nombres. Pour cet effet, supposons a & x égaux à deux nombres donnés, & pour rendre la supposition aussi simple qu'il est possible, faisons $a=1$, & pareillement $x=1$; nous aurons alors dans le Multiplicande $6xx=6$, $-7ax=-7$, & $8aa=+8$, & $6-7+8=7$, donc le Multiplicande est 7: de plus, nous avons dans le Multiplicateur $2xx=2$, $-3ax=-3$, $+4aa=+4$, & $2-3+4=3$; donc le Multiplicateur est 3; & le Multiplicande 7, multiplié par le Multiplicateur 3, donne pour produit 21. Examinons présentement les différentes parties du produit, telles qu'elles sont représentées ici en lettres, & voyons si elles forment la somme que nous venons d'indiquer: $12x^4=12$, $-32ax^3=-32$, $+61a^2x^2=+61$, $-52a^3x=-52$, $+32a^4=+32$ & $12-32+61-52$, $+32$ font précisément 21. Ceci peut servir de preuve que l'opération a été bien faite, quoique cette preuve ne soit pas au-dessus de toute exception; mais il arrive rarement qu'il y ait de l'erreur. Pour qu'il ne reste aucun doute au sujet de l'opération, on peut faire $a=1$, & $x=-1$; car en ce cas le Multiplicande sera $6+7+8=21$, & le Multiplicateur $2+3+4=9$; & le produit $12+32+61+52+32=189$, qui est le même que le produit du Multiplicande 21, multiplié par le Multiplicateur 9.

Comment par la Multiplication en Algèbre on trouve des Théorêmes généraux.

11. Par le moyen de ces Multiplications Algébraïques, on peut découvrir & démontrer plusieurs Théorêmes d'un grand usage dans toutes les parties des Mathématiques. J'en vais donner quelques exemples avant que d'aller plus loin.

Dans le quatriéme exemple de la Multiplication composée, nous avons trouvé, que $a+b$ multiplié par $a-b$ donnoit $aa-bb$; d'où j'infére, que

que *la somme & la différence de deux nombres quels qu'ils soient, multipliées l'une par l'autre donneront la différence de leurs quarrés, & réciproquement:* car a & b représentent deux nombres pris à discrétion; $a+b$ leur somme, $a-b$ leur différence, & $aa-bb$ la différence de leurs quarrés; ainsi prenant deux nombres, supposons 7 & 3, la différence de leurs quarrés sera $49-9=40$; & leur somme 10, multipliée par leur différence 4, fait aussi 40.

Mais ici j'avertis une fois pour toutes, que les exemples pris en nombres suffisent bien pour éclaircir un Théorême général, mais ne peuvent jamais tenir lieu de preuves; à cause qu'une proposition peut se trouver vraie dans quelques cas particuliers, & fausse dans d'autres; mais dès qu'une proposition est vraie en lettres ou symboles, elle emporte sa démonstration avec elle, à cause que ce sont des marques universelles.

Dans le cinquiéme exemple il a été prouvé, que la quantité $a+b$, multipliée par elle-même, donnoit $aa+bb+2ab$; d'où j'infére, que *si un nombre est partagé en deux parties à discrétion, le quarré de la toute sera égal au quarré de chaque partie, & à deux fois le rectangle, ou produit de la multiplication de ces parties, ajoûtés ensemble:* par exemple, si le nombre 10 étoit partagé en 7 & 3; le nombre 100 quarré de 10, seroit égal à 49 quarré de 7, & à 9 quarré de 3, & à 42 double produit de 7 & de 3, multipliés l'un par l'autre: car $49+9+42=100$.

Dans le sixiéme exemple on a vu, que la quantité $a-b$ multipliée par elle-même, donnoit $aa-2ab+bb$; d'où il suit, que *si de la somme des quarrés de deux nombres pris à discrétion, on retranche deux fois le produit de ces nombres, il restera le quarré de leur différence:* car $aa+bb$ est la somme des quarrés de a & de b, & le double de leur produit est $2ab$, & le quarré de $aa-2ab+bb$, c'est-à-dire le quarré de la différence de a & de b, a été trouvé être le produit de la quantité $a-b$ multipliée par elle-même: c'est ainsi que dans les nombres 7 & 3, le quarré de 7 est 49, le quarré de 3 est 9, & la somme de leurs quarrés est 58; & si de cette somme on ôte le double produit 42, le reste sera 16, quarré de 4, c'est-à-dire, quarré de la différence des nombres 7 & 3.

Ces deux derniers Théorêmes sont en substance les mêmes que la quatriéme & la septiéme propositions du second Livre d'*Euclide*.

Comment on peut exprimer les trois côtés d'un Triangle rectangle en nombres rationels.

12. Les deux Théorêmes, dont il s'agit, peuvent servir à résoudre un Problême de grande importance en Algébre; qui est, de trouver trois nom-

nombres qui représentent les trois côtés d'un triangle rectangle; ou plutôt, de trouver autant de pareils nombres, pris trois à trois, qu'on voudra; c'est-à-dire, en d'autres termes, *Trouver trois nombres tels, que la somme des quarrés de deux de ces nombres soit égale au quarré du troisiéme.* Or il est clair que ces trois nombres $aa-2ab+bb$, & $4ab$, & $aa+2ab+bb$, sont de telle nature, que les deux premiers ajoûtés ensemble sont égaux au troisiéme: il est certain aussi, que le premier & le troisiéme sont des nombres quarrés; car $aa-2ab+bb$, est le quarré de $a-b$; & $aa+2ab+bb$ est le quarré de $a+b$; c'est pourquoi si le nombre du milieu $4ab$ étoit un nombre quarré comme les deux autres, nous aurions trois nombres quarrés, dont les deux premiers ajoûtés ensemble seroient égaux au troisiéme; & par conséquent, les racines de ces trois quarrés seroient trois nombres qui satisferoient aux conditions du Problême. Mais le nombre du milieu $4ab$ sera un quarré, si a & b sont des nombres quarrés: car si l'on suppose $a=rr$ & $b=ss$, on aura $4ab=4rrss$, qui est un nombre quarré dont la racine est $2rs$: mais la racine du premier quarré $aa-2ab+bb$ étoit $a-b$, qui en ce cas est $rr-ss$; & la racine du troisiéme quarré $aa+2ab+bb$ étoit $a+b$, qui est $rr+ss$; ainsi ces trois nombres, $rr-ss$, $2rs$ & r^2+s^2 sont tels, que le quarré du premier ajoûté au quarré du second fera le quarré du troisiéme; & ce cas aura lieu quels que soient les nombres qu'on veuille mettre pour r & s. Mais $rr-ss$ est la différence des quarrés de r & de s, & la quantité $2rs$ est le double produit de leur multiplication, & enfin $rr+ss$ est la somme des quarrés de r & de s. Puis donc qu'il nous est permis de prendre quels nombres il nous plaît pour r & s, le Problême admettra la solution suivante: *Prenez deux nombres à discrétion, & de ces deux nombres formez-en trois autres ainsi: prenez la différence de leurs quarrés, le double produit de leur multiplication, & la somme de leurs quarrés, & les trois nombres ainsi trouvés répondront à la condition du Problême.* Par exemple, que les nombres pris soient 2 & 1: la différence des quarrés de ces nombres est $4-1=3$; le double produit de leur multiplication est $2\times2\times1=4$; & la somme de leurs quarrés est $4+1=5$; ainsi les nombres 3, 4 & 5, servent à résoudre la question proposée; car $3\times3+4\times4=5\times5$; c'est-à-dire $9+16=25$. Supposons que les nombres choisis soient $2+3$: la différence de leurs quarrés sera $9-4=5$, leur double produit $2\times3\times2=12$, & la somme de leurs quarrés $9+4=13$; donc 5, 12 & 13, sont trois autres nombres qui répondent à la condition du Problême: car $5\times5+12\times12=13\times13$, c'est-à-dire, $25+144=169$. Enfin, que les nombres pris soient 4 & 1; & la différen-

ce

ce de leurs quarrés ſera $16 - 1 = 15$, leur double produit $2 \times 4 \times 1 = 8$, & la ſomme de leurs quarrés $16 + 1 = 17$; c'eſt pourquoi 8, 15 & 17, répondent auſſi aux conditions du Problême: car $8 \times 8 + 15 \times 15 = 17 \times 17$, c'eſt-à-dire, $64 + 225 = 289$.

De la Diviſion des Quantités Algébraïques ſimples.

13. La diviſion des Quantités Algébraïques ſimples, quand elle eſt poſſible en nombres entiers, ſe fait, premiérement en diviſant le coëfficient numérique du dividende par le coëfficient numérique du diviſeur, & puis en mettant après le quotient toutes les lettres du dividende qui ne ſe trouvent pas dans le diviſeur ; le ſigne du quotient dans la diviſion étant déterminé par ceux du diviſeur & du dividende, précisément de même que le ſigne du produit dans la multiplication eſt déterminé par ceux du Multiplicateur & du Multiplicande; c'eſt-à-dire, ſi les ſignes du diviſeur & du dividende ſont ſemblables, ſavoir, tous deux affirmatifs, ou tous deux négatifs, le quotient ſera affirmatif, & s'ils ſont diſſemblables, négatif: par exemple, ſi la quantité $-12ab$ eſt diviſée par $-3a$, le quotient ſera $+4b$; ce que je démontre ainſi. Dans toute diviſion le quotient doit être une quantité telle, qu'étant multipliée par le diviſeur elle forme le dividende; ainſi rechercher le quotient dans le cas dont il s'agit, n'eſt autre choſe, que rechercher quel nombre, ou quelle quantité, multipliée par $-3a$, le diviſeur formera le dividende. Je demande donc premiérement, quel ſigne multiplié par $-$, ſigne du diviſeur, donne $-$, ſigne du dividende, & la réponſe eſt $+$; par conſéquent $+$ eſt le ſigne du quotient: je demande enſuite, quel nombre multiplié par 3, coëfficient du diviſeur, donnera 12, coëfficient du dividende, & la réponſe eſt 4; donc 4 eſt le coëfficient du quotient: enfin je demande, quelle lettre multipliée par a, lettre du diviſeur, produira ab, dénominateur, ou partie litérale du dividende, & la réponſe eſt b; donc b eſt la lettre du quotient: & de cette maniére nous avons le quotient entier, qui eſt $+4ab$. Le même raiſonnement eſt applicable à tous les autres cas.

Exem-



Exemples de Division Algébraïque simple.

Exemple 1. $4ab)\ 24abbc\ (6bc$.
2. $+7)\ -35ab\ (-5ab$.
3. $-x)\ -3xx\ (+3x$.
4. $-9ab)\ +72ab\ (-8$.
5. $-4a^3)\ -60a^8\ (+15a^5$.
6. $4x^2)\ 60x^9\ (+15x^7$.
7. $+4a^3x^2)\ -60a^8x^9\ (-15a^5x^7$.
8. $b)\ \frac{3}{4}ab\ (\frac{3}{4}a$.
9. $\frac{2}{3})\ \frac{4}{5}b\ (\frac{6}{5}b$.

Comment on marque les Fractions en Algébre.

Quand la division se trouve impossible suivant la méthode que nous venons d'indiquer, le quotient ne peut s'exprimer que par une fraction, dont le Numérateur est le dividende, & le Dénominateur le diviseur; Voyez l'Introduction Art. 13. Comme s'il falloit diviser a par b (division impossible suivant la règle précédente) le quotient doit être exprimé par cette fraction $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire, a divisé par b, ou le quotient de a divisé par b.

Si le Numérateur, ou le Dénominateur, ou l'un & l'autre, sont des quantités composées, les fractions respectives doivent s'écrire ainsi; $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{b+c}$, $\frac{a+b}{c-d}$.

Si la division est en partie possible suivant les règles précédentes, & en partie impossible, il faut la continuer aussi loin qu'il est possible, & le reste doit être désigné par une fraction, comme la division ordinaire: par exemple, s'il falloit diviser $ad+bd+c$ par d, le quotient seroit $a+b+\frac{c}{d}$.

De la division des Quantités Algébraïques composées.

14. La division des Quantités Algébraïques composées se fait, premiérement, en rangeant les différens membres, tant du diviseur que du dividende, suivant les dimensions de quelque lettre commune à tous deux, & puis en procédant comme dans l'Arithmétique vulgaire.

N. B. On dit qu'une quantité est disposée suivant les dimensions de quelqu'une des lettres qu'elle contient, quand la plus haute puissance de cette lettre est placée la premiére, & ainsi de suite, comme dans l'exemple que nous allons donner, ou le diviseur & le dividende sont rangés suivant les dimensions de la lettre x.

I 2 On

On demande de diviser la quantité $48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3$ par cette quantité $2x - 3a$. Ici, comme mon diviseur est composé de deux membres, je prends les deux premiers membres du dividende pour commencer mon opération sur eux; ensuite je divise le premier nombre de cette partie du dividende par le premier membre du diviseur, savoir $48x^3$ par $2x$, & le quotient est $24xx$, que je mets au quotient: ceci étant fait, je multiplie le diviseur $2x - 3a$ par le quotient $24xx$, & le produit est $48x^3 - 72ax^2$, que je place sous les deux premiers membres de mon premier dividende $48x^3 - 76ax^2$, & puis soustrayant la premiére de ces quantités de la derniére, je trouve qu'il reste $4ax^2$: j'ajoûte à ce reste le membre suivant de mon dividende, qui est $-64a^2x$, & me trouve par-là avoir un second dividende, savoir $-4ax^2 - 64ax^2$: ici je divise de nouveau le premier membre de ce dividende, par le premier membre du diviseur, c'est-à-dire, $-4ax^2$ par $2x$, & le quotient est $-2ax$, que j'ajoûte au quotient général; multipliant ensuite le diviseur $2x - 3a$ par ce dernier quotient $-2ax$, le produit est $-4ax^2 + 6a^2x$, lequel étant soustrait du second dividende $-4ax^2 - 64a^2x$ laisse pour reste $-70a^2x$; j'ajoûte à ce reste $+105a^3$ dernier membre du dividende général, & me trouve par-là avoir un troisiéme dividende particulier, qui est $-70a^2x + 105a^3$; le premier membre de ce dividende, divisé par le premier membre du diviseur, donne $-35aa$, que j'ajoûte au quotient: multipliant ensuite $-35aa$ par le diviseur, j'ai pour produit $-70a^2x + 105a^3$, lesquels étant soustraits du dernier dividende ne laissent aucun reste; desorte que le quotient entier est $24xx - 2ax - 35aa$. Pour que le Lecteur puisse se faire une idée plus nette de l'opération, nous la donnerons ici dans l'ordre où elle doit se faire, rangée de la maniére qu'il faut, & augmentée encore de quelques exemples.

Exemple 1.

$$
\begin{array}{l}
2x - 3a)\ 48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3\ (24x^2 - 2ax - 35a^2 \\
\qquad\quad 48x^3 - 72ax^2 \\
\qquad\qquad\ * \quad -4ax^2 - 64a^2x \\
\qquad\qquad\qquad -4ax^2 + 6a^2x \\
\qquad\qquad\qquad\quad * \quad -70a^2x + 105a^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -70a^2x + 105a^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad * \qquad *
\end{array}
$$

Exem-

Exemple 2.

$$
\begin{array}{l}
4x-5a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (12x^2-4ax-21a^2 \\
\quad 48x^3-60ax^2 \\
\quad * \quad -16ax^2-64a^2x \\
\quad\quad -16ax^2+20a^2x \\
\quad\quad\quad * \quad -84a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\quad -84a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad * \quad *
\end{array}
$$

Exemple 3.

$$
\begin{array}{l}
6x+7a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (8x^2-22ax+15a^2 \\
\quad 48x^3+56ax^2 \\
\quad * \quad -132ax^2-64a^2x \\
\quad\quad -132ax^2-154a^2x \\
\quad\quad\quad * \quad +90a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\quad +90a^2x+105a^3 \\
\quad\quad\quad\quad\quad * \quad *
\end{array}
$$

Exemple 4.

$$
\begin{array}{l}
3x^2-4x+5)\ 18x^4-45x^3+82x^2-67x+40\ (6x^2-7x+8 \\
\quad 18x^4-24x^3+30x^2 \\
\quad * \quad -21x^3+52x^2-67x \\
\quad\quad -21x^3+28x^2-35x \\
\quad\quad\quad * \quad +24x^2-32x+40 \\
\quad\quad\quad\quad +24x^2-32x+40 \\
\quad\quad\quad\quad\quad * \quad * \quad *
\end{array}
$$

Cette méthode de faire la division est la plus claire à mon avis, comme s'éloignant le moins de la division ordinaire; mais on peut l'abréger tant soit peu, en faisant les différentes opérations de la maniére suivante.

Exemple 1.

$$2x-3a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (24x^2-2ax-35aa$$
$$48x^3-72ax^2$$
$$*\quad -4ax^2$$
$$-4ax^2+6a^2x$$
$$-70a^2x$$
$$-70a^2x+105a^3$$
$$*\quad *$$

Exemple 2.

$$4x-5a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (12x^2-4ax-21a^2$$
$$48x^3-60ax^2$$
$$*\quad -16ax^2$$
$$-16ax^2+20a^2x$$
$$*\quad -84a^2x$$
$$-84a^2x+105a^3$$
$$*\quad *$$

Exemple 3.

$$6x+7a)\ 48x^3-76ax^2-64a^2x+105a^3\ (8x^2-22ax+15aa$$
$$48x^3+56ax^2$$
$$*\quad -132ax^2$$
$$-132ax^2-154a^2x$$
$$*\quad +90a^2x$$
$$+90a^2x+105a^3$$
$$*\quad *$$

Exemple 4.

$$3x^2-4x+5)\ 18x^4-45x^3+82x^2-67x+40\ (6x^2-7x+8$$
$$18x^4-24x^3+30x^2$$
$$*\quad -21x^3+52x^2$$
$$-21x^3+28x^2-35x$$
$$*\quad +24x^2-32x$$
$$+24x^2-32x+40$$
$$*\quad *\quad *$$

La

La justesse de cette sorte de division peut se prouver de la même maniére que dans la division ordinaire, savoir, en multipliant le diviseur par le quotient, ou le quotient par le diviseur, & en ajoûtant le reste s'il y en a; car alors si le produit, ou la somme, égale le dividende, la division est bien faite, sans cela point: par exemple, si au lieu de diviser $48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3$ par $2x - 3a$, nous divisons $48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 110a^3$ par $2x - 3a$, le quotient sera le même qu'auparavant, savoir, $24x^2 - 2ax - 35a^2$, mais il y aura un reste de $5a^3$; donc si le quotient $24x^2 - 2ax - 35aa$ est multiplié par le diviseur $2x - 3a$, le produit conjointement avec le reste $5a^3$ formera le dividende $48x^3 - 76ax^2, - 64a^2x + 110a^3$.

$$\begin{array}{l} 24x^2 - 2ax - 35a^2 \\ 2x - 3a \\ \hline 48x^3 - 4ax^2 - 70a^2x + 105a^3 \\ \quad - 72ax^2 + 6a^2x \\ \hline 48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 105a^3 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + 5a^3 \\ \hline 48x^3 - 76ax^2 - 64a^2x + 110a^3. \end{array}$$

Si, quand le diviseur & le dividende sont placés suivant les dimensions de quelque lettre commune, il reste un ou plusieurs endroits vuides, on peut mettre une étoile à chacun de ces endroits: comme s'il étoit question de diviser $16x^4 - 72a^2x^2 + 81a^4$ par $2x - 3a$: on voit du premier coup d'œil, qu'il y a deux endroits vuides dans le dividende, savoir les endroits que la premiére & la troisiéme des puissances de x devoient occuper: le tout étant rempli, voici quel sera le dividende; $16x^4 * - 72a^2x^2 * + 81a^4$.

$$\begin{array}{l} 2x - 3a)\ 16x^4 \quad * \quad - 72a^2x^2 \; * \; + 81a^4\ (8x^3 + 12ax^2 - 18a^2x - 27a^3 \\ \qquad 16x^4 - 24ax^3 \\ \qquad\ \ * \quad + 24ax^3 \\ \qquad\qquad + 24ax^3 - 36a^2x^2 \\ \qquad\qquad\qquad * \quad - 36a^2x^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad - 36a^2x^2 + 54a^3x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad * \quad - 54a^3x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 54a^3x + 81a^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad * \qquad * \end{array}$$

Nous ajoûterons encore un exemple du même genre: on demande le quotient de la division de $81x^4 - 256a^4$ par $3x + 4a$.

$$3x+4a)\ 81x^4\ \ *\ \ *\ \ *-256a^4\ (27x^3-36ax^2+48a^2x-64a^3$$
$$81x^4+108ax^3$$
$$*\ -108ax^3$$
$$-108ax^3-144a^2x^2$$
$$*\ +144a^2x^2$$
$$+144a^2x^2+192a^3x$$
$$*\ -192a^3x$$
$$-192a^3x-256a^4$$
$$*\ \ *$$

Comme la division en fractions décimales peut, à l'aide des o, être continuée à discrétion, il en est de même de la division Algébraïque, qu'on peut pousser aussi loin qu'on veut en mettant à chaque place vuide une étoile: par exemple, si l'on divise 1 par $1+x$, le quotient sera $1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$ &c. à l'infini: mais si l'on divise 1 par $1-x$, le quotient sera, $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ &c. à l'infini. Voyez l'operation:

$$1+x)\ 1\ \ *\ \ *\ \ *\ \ *\ \ *\ \ (1-x+x^2-x^3+x^4-x^5\ \&c.$$
$$1+x$$
$$*-x$$
$$-x-x^2$$
$$*+x^2$$
$$+x^2+x^3$$
$$*-x^3$$
$$-x^3-x^4$$
$$*+x^4$$
$$+x^4+x^5$$
$$*-x^5.$$

$$1-x)\ 1\ \ *\ \ *\ \ *\ \ *\ \ *\ \ (1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\ \&c.$$
$$1-x$$
$$*+x$$
$$+x-x^2$$
$$*+x^2$$
$$+x^2-x^3$$
$$*+x^3$$
$$+x^3-x^4$$
$$*+x^4$$
$$+x^4-x^5$$
$$*+x^5.$$

Comme

Les Quotiens qui résultent de cette sorte de division sont ordinairement si réguliers, qu'un petit nombre de termes suffit pour trouver ce qu'on veut savoir, à peu près avec autant de précision que si l'opération étoit continuée à l'infini. Pour s'en convaincre on n'a qu'à jetter les yeux sur les quatre ou cinq premiers termes du quotient.

Pour donner un autre exemple de cette espéce de division, je demande le quotient que donnera l'unité divisée par la quantité $1-2x+xx$. Voici quel sera le résultat de l'opération:

$$
\begin{array}{l}
1-2x+xx)\ 1\ *\ *\ *\ *\ (1+2x+3xx+4x^3+5x^4\ \&c.\\
\quad 1-2x+xx\\
\quad *+2x-xx\\
\quad\quad +2x-4xx+2x^3\\
\quad\quad\quad *+3xx-2x^3\\
\quad\quad\quad +3xx-6x^3+3x^4\\
\quad\quad\quad\quad *+4x^3-3x^4\\
\quad\quad\quad\quad +4x^3-8x^4\\
\quad\quad\quad\quad\quad *+5x^4\\
\quad\quad\quad\quad\quad +5x^4.
\end{array}
$$

1. Les quatre étoiles annexées à l'unité qui sert de dividende, marquent que cette division, quoique pouvant aller à l'infini, ne sera cependant point portée ici plus loin que la quatriéme puissance de x.

2. La régularité du quotient $1+2x+3xx+4x^3+5x^4$, ne laisse aucun lieu de douter que les termes suivans ne soient $+6x^5+7x^6+8x^7$, &c. à l'infini.

3. Si les quotiens sont réguliers, les restes le seront aussi: ainsi dans le cas présent les restes sont $2x-1x^2$, $3x^2-2x^3$, $4x^3-3x^4$, $5x^4-4x^5$; mais de ce dernier reste, la partie qui termine la suite, savoir $-4x^5$, doit être négligée, comme inutile: nous en disons autant de tous les autres termes qui sont dans le même cas, soit qu'il s'agisse de multiplication, de division, d'extraction de racines, ou d'une autre opération quelconque.

Examinons présentement la division précédente par le moyen de la multiplication, c'est-à-dire, que le quotient $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ soit multiplié par le diviseur $1-2x+xx$, & voyons si le produit sera $1****$; car comme le quotient n'est point réel au-delà de cinq termes,

mes, il ne faut pas s'attendre que le produit soit réel pour un nombre de termes plus grand. Voyez l'opération, dans laquelle la multiplication s'est faite de la gauche à la droite:

$$\begin{array}{l} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\ 1 - 2x + x^2 \\ \hline 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\ \quad - 2x - 4x^2 - 6x^3 - 8x^4 \\ \qquad + x^2 + 2x^3 + 3x^4 \\ \hline 1 \quad * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

Il y a encore une autre méthode de faire ces multiplications, que je donnerai ici, moins pour le grand usage dont elle est dans de pareils cas, qu'à cause qu'elle peut servir à éclaircir la règle d'*Ougthred* sur la manière d'abréger la multiplication. Cette règle se trouve dans le Chap. 4 de sa *Clavis* &c.

Ici le Multiplicateur doit être disposé dans un ordre opposé à celui suivant lequel il étoit rangé auparavant, c'est-à-dire, que la place des unités doit être au-dessous de la puissance du Multiplicande, qu'on a dessein de mettre à la fin du produit; comme dans le présent cas 1 doit se trouver au-dessous de $5x^4$:

$$\begin{array}{r} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\ x^2 - 2x + 1. \end{array}$$

Le Multiplicateur & le Multiplicande étant placés ainsi, chaque terme du Multiplicateur doit commencer par multiplier ce terme du Multiplicande au-dessous duquel il se trouve, & ensuite tous les autres termes en allant vers la gauche; ainsi 1 doit multiplier $5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$; mais le terme suivant du Multiplicateur, savoir $-2x$, doit multiplier seulement $4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$; & le dernier terme du Multiplicateur, savoir xx, doit multiplier uniquement $3xx + 2x + 1$, comme on le voit ici:

$$\begin{array}{l} 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\ \qquad\qquad x^2 - 2x + 1 \\ \hline 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \\ \quad - 2x - 4x^2 - 6x^3 - 8x^4 \\ \qquad x^2 + 2x^3 + 3x^4 \\ \hline 1 \quad * \quad * \quad * \quad * \end{array}$$

N. B.

N. B. Dans l'application de cet exemple à la règle d'*Ougthred*; il faut faire x égal à $\frac{1}{10}$, xx à $\frac{1}{100}$, &c.

Je ne pouvois guéres dire moins que je n'ai fait concernant la division, pour donner au jeune Algébriste une notion passable de cette opération; mais si j'en avois dit davantage, & que j'eusse entré dans le détail de tous les cas particuliers qui peuvent avoir lieu en fait de division litérale, je lui aurois rempli la tête d'idées abstraites, qu'il auroit surement oubliées avant d'avoir eu occasion d'en faire usage. C'est par la même raison que je ne m'étendrai point présentement sur l'invention des diviseurs, la doctrine des quantités irrationelles, la réduction des racines sourdes, & quelques autres choses de même nature, attendant à l'égard de chacune de ces matiéres que l'occasion d'en parler se rencontre en chemin faisant; & c'est-là l'unique méthode que j'observerai à leur égard.

De la Proportion en Nombres.

15. La règle de proportion en Algébre différe si peu de la règle de proportion en Arithmétique vulgaire, qu'il suffira d'en indiquer un seul exemple. On demande: *Si* a *donne* b, *qu'est-ce que* c *donnera*? Ici le second & le troisiéme terme, multipliés l'un par l'autre, produisent bc, & le quotient de ce produit divisé par le premier terme a ne sauroit être exprimé autrement que par la fraction $\frac{bc}{a}$: c'est ce qui paroît manifestement par ce qui a été dit des fractions dans l'Artic. 13. Mais comme j'ai évité jusqu'ici à dessein toute idée de proportion, aimant mieux en appeller sur ce sujet aux notions communes que tout le monde en a, ou croit en avoir, que d'entamer trop tôt une matiére assez difficile, je pense qu'à-présent que le Lecteur a déjà fait certains progrès, il est tems que j'explique distinctement la nature de la proportion rélativement aux nombres, & que je fasse voir en quoi elle consiste.

Suivant *Euclide*, quatre nombres sont appellés proportionels, ou, ce qui revient au même, le premier nombre est dit avoir la même raison au second, que le troisiéme a au quatriéme; ou le premier est dit être au second, comme le troisiéme est au quatriéme, quand le premier nombre est le même multiple, la même partie ou les mêmes parties du second, que le troisiéme est du quatriéme: mais on demandera peut-être: Comment pouvons-nous savoir quelles parties, partie, ou multiple un nombre quelconque est d'un autre? A quoi je réponds, qu'on peut le savoir par une fraction, dont le Numérateur est le premier nombre, & le Dénominateur le second: ainsi la fraction $\frac{2}{3}$ marque expressément que le Nu-

Numérateur 2 contient les deux tiers du Dénominateur 3; car on ne sauroit douter, que 1 ne soit $\frac{1}{3}$ de trois, & par conséquent que 2 ne soient les $\frac{2}{3}$ de ce même nombre: par la même raison la fraction $\frac{12}{8}$ marque que le nombre 12 est $\frac{12}{8}$ ou $\frac{3}{2}$ du nombre 8; & enfin la fraction $\frac{12}{4}$ marque que le nombre 12 est $\frac{12}{4}$ du nombre 4, ou, ce qui revient au même, contient exactement 3 fois le nombre 4, & par conséquent, que 12 est un multiple de 4, puisqu'il le contient juste 3 fois sans aucun reste: ainsi pour tout homme qui est au fait des fractions, la définition de proportion donnée par Euclide pourroit être exprimée plus clairement ainsi: *Quatre nombres s'appellent proportionels, quand une fraction dont le Numérateur est le premier nombre, & le Dénominateur le second, est égale à une fraction dont le Numérateur est le troisiéme nombre, & le Dénominateur le quatriéme.* Ainsi 2 sont à 3 comme 4 à 6, à cause que $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$; ainsi 12 sont à 8 comme 15 à 10, à cause que $\frac{12}{8}=\frac{15}{10}$, ces deux fractions pouvant également se réduire à $\frac{3}{2}$; ainsi 2 sont à 6 comme 4 sont à 12, à cause que $\frac{2}{6}=\frac{4}{12}$, & que chacune de ces fractions est $=\frac{1}{3}$; enfin 6 sont à 2, comme 12 à 4, à cause que $\frac{6}{2}=\frac{12}{4}=3$.

Cette idée de proportionalité peut servir à démontrer un théorême de grand usage en Algébre, qui est, *Que toutes les fois que quatre nombres sont proportionels, le produit des extrêmes multipliés l'un par l'autre sera égal au produit des deux termes du milieu multipliés de même.* Supposons, par exemple, que a soit à b comme c est à d; je dis en ce cas, que ad produit des extrêmes, sera égal à bc produit des termes du milieu: car puisque a est à b comme c est à d, il suit de ce qui a déja été prouvé, que la fraction $\frac{a}{b}$ est égale à la fraction $\frac{c}{d}$: multipliez l'un & l'autre terme de la fraction $\frac{a}{b}$ par d, & les deux termes de la fraction $\frac{c}{d}$ par b (multiplication qui ne change rien aux valeurs des fractions) & vous aurez $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$; c'est-à-dire, le quotient de ad divisé par bd, est égal au quotient de bc divisé par bd; donc ad doit être égal à bc, c'est-à-dire, le produit des extrêmes doit être égal au produit des termes du milieu. *C. Q. F. D.*

L'inverse de cette proposition est véritable aussi, savoir, que *Toutes les fois qu'on a une équation en nombres, dans laquelle le produit de deux nombres d'un côté se trouve égal au produit de deux nombres de l'autre, une pareille équation peut se résoudre en quatre proportionelles, en formant des deux qui composent l'un des produits, les extrêmes, & de ceux qui composent l'autre produit, les termes du milieu.* Soit, par exemple $ad=bc$; en faisant de

a &

a & de d les extrêmes, & de b & c les termes du milieu, nous aurons a à b, comme c à d; si on le nie, que a soit à b, comme c à e; alors nous aurons $ae=bc$; mais par l'hypothése $ad=bc$; donc $ae=ad$; donc e est égal à d & a est à b, comme c est à d. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Il suit de ce que nous venons de dire, que si a, b & c, sont en proportion continue, c'est-à-dire, si a est à b comme b est à c, on a $b^2=ac$: & de plus, si $b^2=ac$, que les quantités a, b, c, sont en proportion continue.

Les propriétés communes de la proportionalité en nombres démontrées.

16. De ce qui est dit dans le dernier Article, on peut déduire aisément les preuves de la plupart des propriétés communes des nombres proportionels. J'ai dessein de rassembler les plus utiles de ces propriétés dans cet Article, auquel le Lecteur pourra avoir recours, quand il croira en avoir besoin.

Premiérement donc, à l'aide de ce qui vient d'être prouvé, on peut démontrer clairement la règle de trois, qui consiste à trouver une quatriéme proportionelle; car soient a, b & c trois nombres donnés, & qu'il s'agisse de trouver d, quatriéme terme proportionel; en ce cas, puisque a est à b comme c est à d, on aura ad produit des extrêmes, égal à bc, produit des termes du milieu: divisez les deux membres de l'équation par a, & vous aurez $d=\frac{bc}{a}$, ce qui revient au même que si on disoit, Quand trois nombres sont donnés, on peut trouver un quatriéme nombre proportionel, en multipliant le second & le troisiéme de ces nombres l'un par l'autre, & en divisant le produit par le premier.

Dans la règle de trois inverse, les nombres peuvent être encore a, b & c: mais tout homme qui fera attention à la nature de cette règle, s'appercevra facilement que le quatriéme nombre cherché n'est pas un quatriéme terme proportionel aux trois nombres donnés tels qu'ils sont rangés dans l'ordre a, b, c, mais tels qu'ils sont dans l'ordre c, b, a, ou c, a, b, & par conséquent, en ce cas le quatriéme nombre sera $\frac{ab}{c}$.

2°. Si deux proportions sont égales à une troisiéme, il faut qu'elles soient égales entre elles, à cause que deux fractions ne sauroient être égales à une troisiéme, sans l'être entre elles: par exemple, si a est à b, comme c est à d, & que c soit à d, comme e est à f, nous aurons a à b, comme e à f.

3°. Si a est à b, comme c est à d; en ce cas b sera à a, comme d est à c; ce qui s'appelle une proportion inverse: car si a est à b, comme c est à d, nous aurons $ad=bc$; faites de b & de c les extrêmes, & vous aurez b à a, comme d à c.

4°. Si a à est b, comme c à d, nous aurons (*alternando*) a à c, comme b à d: car puisque a est à b, comme c à d, & par conséquent $ad=bc$, faites de a & de d les extrêmes, & de c & b les termes moyens, & vous aurez a à c comme b à d.

5°. Si a est à b, comme c à d, & qu'on prenne deux Multiplicateurs quels qu'ils soient, comme e & f; je dis que ea est à fb, comme ec à fd: car puisque a est à b, comme c à d, & par conséquent $ad=bc$; si l'on multiplie les deux membres de l'équation par le produit ef, on aura $ad\times ef=bc\times ef$; mais $ad\times ef=ea\times fd$, & $bc\times ef=fb\times ec$; donc $ea\times fd=fb\times ec$; faites de ea & de fd les extrêmes, & vous aurez ea est à fb, comme ec est à fd. On peut démontrer de même (*mutatis mutandis*) que si a est à b, comme c est à d, on aura $\frac{a}{e}$ à $\frac{b}{f}$ comme $\frac{c}{e}$ à $\frac{d}{f}$.

6°. Si a est à b, comme c est à d, il s'ensuit que a^2 est à b^2, comme c^2 est à d^2; car a étant à b comme c est à d, & par cela même $ad=bc$, il suffit d'élever au quarré les deux membres de l'équation, pour avoir $a^2d^2=b^2c^2$: faisant de a^2 & de d^2 les deux extrêmes, il en résulte cette proportion, a^2 est à b^2, comme c^2 à d^2. En revenant sur nos pas nous trouverons pareillement, que si a^2 est à b^2, comme c^2 est à d^2, il faut que a soit à b, comme c est à d, & $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$, comme $\sqrt{c}$ à $\sqrt{d}$.

7°. Si a est à b, comme c est à d, (*componendo*) $\overline{a+b}$ est à b, comme $\overline{c+d}$ est à d; ou $\overline{a+b}$ est à a, comme $\overline{c+d}$ est à c: car puisque a est à b, comme c est à d, & par conséquent $ad=bc$, on n'a qu'à ajoûter bd à chaque membre de l'équation, & on aura $ad+bd=bc+bd$; mais $ad+bd$ est le prodnit $\overline{a+b}$ multiplié par d; & $bc+bd$ est le produit de b multiplié par $\overline{c+d}$; donc $\overline{a+b}\times d=b\times\overline{c+d}$; faites de $\overline{a+b}$ & de d les extrêmes, & vous aurez $\overline{a+b}$ à b, comme $\overline{c+d}$ est à d. De plus, puisque $bc=ad$, ajoûtés ac des deux côtés, & vous aurez $ac+bc=ac+ad$, c'est-à-dire, $\overline{a+b}\times c=a\times\overline{c+d}$; faites de $\overline{a+b}$ & de c les extrêmes, & vous aurez $\overline{a+b}$ à a, comme $\overline{c+d}$ à c.

8°. Si a est à b, comme c est à d, (*dividendo*) $\overline{a-b}$ sera à b, comme

me $\overline{c-d}$ eſt à d; ou $\overline{a-b}$ eſt à a, comme $\overline{c-d}$ eſt à c. Cette propoſition ſe démontre par la ſouſtraction, préciſément comme la propoſition précédente l'a été par l'addition.

9°. Si à deux nombres qui ſont entre eux dans une certaine proportion, l'on ajoûte deux nombres qui ſoient dans la même proportion, ou bien, ſi l'on ſouſtrait de deux nombres deux autres nombres, qui ayent entre eux la même proportion que les nombres dont ils ont été ſouſtraits, les ſommes ou les reſtes ſeront dans la même proportion que les nombres premiérement propoſés: par exemple, ſi les nombres c & d ſont entre eux comme a & b, c'eſt-à-dire, ſi a eſt à b, comme c eſt à d, & qu'on ajoûte aux deux premiers nombres les derniers, ou qu'on les en retranche, on aura non ſeulement $\overline{a+c}$ à $\overline{b+d}$ comme a à b, mais auſſi $\overline{a-c}$ à $\overline{b-d}$, comme a à b: car puiſque par la ſuppoſition, a eſt à b, comme c eſt à d, (*alternando*) a eſt à c, comme b à d; & (*componendo*) $a+c$ eſt à a, comme $b+d$ à b; & encore (*alternando*) $\overline{a+c}$ eſt à $\overline{b+d}$, comme a eſt à b: de même (*alternando* & *dividendo*) nous aurons $\overline{a-c}$ à $\overline{b-d}$, comme a eſt à b.

10°. S'il y a trois nombres a, b & c, & trois autres nombres d, e & f, en même proportion que les premiers, & rangés dans le même ordre, c'eſt-à-dire, ſi a eſt à b, comme d eſt à e, & que b ſoit à c, comme e eſt à f; je dis, que par égalité de raiſon, les extrêmes ſeront dans la même proportion, ſavoir, que a ſera à c, comme d eſt à f: car puiſque par la ſuppoſition, a eſt à b, comme d eſt à e, (*alternando*) a eſt à d, comme b eſt à e; & pareillement, puiſque b eſt à c, comme e eſt à f, nous aurons b à e, comme c à f: puis donc que a eſt à d, comme b à e, & b à e, comme c à f; il ſuit de la ſeconde propoſition, que a eſt à d, comme c à f; & (*alternando*) a à c, comme d à f.

11°. S'il y a trois nombres a, b & c, & trois autres nombres d, e & f en même proportion que les premiers, mais dans un ordre oppoſé, en ſorte que a ſoit à b comme e à f & b à c comme d à e; je dis que les extrêmes ſeront en proportion, ſavoir que a ſera à c comme d à f: car puiſque a eſt à b comme e à f, nous avons $af=be$; d'ailleurs puiſque b eſt à c comme d à e, nous avons $cd=be$; donc $af=cd$; faites de a & de f les extrêmes, & vous aurez a à c comme d à f.

N. B. S'il y a deux ſéries de nombres comme a, b, c, &c. d, e, f, &c. chaque ſérie étant compoſée du même nombre de termes, & que toutes les proportions entre les termes contigus dans une ſérie, ſoient reſpecti-

pectivement égales à toutes celles dans l'autre, c'eſt-à-dire, a à b, comme d à e, & b à c, comme e à f, &c. je dis, que les termes extrêmes d'une des ſéries ſeront proportionels aux termes extrêmes de l'autre: car la démonſtration de la dixiéme propoſition peut s'étendre à autant de termes qu'on voudra; & cette proportionalité des extrêmes découle de ce qu'on appelle une *égalité bien ordonnée*, à cauſe que l'égalité reſpective de toutes les proportions d'une ſérie à celle de leurs termes correſpondans dans l'autre eſt bien rangée. Que ſi chaque proportion dans une ſérie, a une proportion égale qui lui correſpond dans l'autre, mais pas préciſément dans le même ordre, par exemple, ſi a étoit à b, comme e à f, & b à c, comme d à e; en ce cas, quoique les extrêmes ſoient proportionels, comme on pourra s'en convaincre en continuant la démonſtration de cette onziéme propoſition, on déſigne cette proportionalité des extrêmes par les mots d'*égalité troublée*; c'eſt-à-dire, d'égalité de toutes les proportions dans une ſérie à toutes celles dans l'autre, mais mal rangée.

12°. Si a eſt à b, comme c à d, nous aurons $\overline{a+b}$ à $\overline{a-b}$, comme $\overline{c+d}$ eſt à $\overline{c-d}$: car puiſque a eſt à b, comme c à d, nous aurons (*componendo*) $\overline{a+b}$ à a, comme $\overline{c+d}$ à c; nous aurons auſſi (*dividendo*) $\overline{a-b}$ à a, comme $\overline{c-d}$ à c; & (*invertendo*) a à $\overline{a-b}$, comme c à $\overline{c-d}$: puis donc que nous avons $\overline{a+b}$ à a, comme $\overline{c+d}$ à c; & a à $\overline{a-b}$, comme c à $\overline{c-d}$, c'eſt-à-dire, puiſque nous avons trois nombres $\overline{a+b}$, a & $\overline{a-b}$, & trois autres nombres qui leur ſont proportionels dans le même ordre, ſavoir, $\overline{c+d}$, c & $\overline{c-d}$, il s'enſuit (*ex æquo*) que les extrêmes ſeront proportionels, c'eſt-à-dire que $\overline{a+b}$ ſera à $\overline{a-b}$, comme $\overline{c+d}$ eſt à $\overline{c-d}$.

13°. S'il y a une ſérie de nombres, k, l, m, n, dont k eſt à l, comme a à b, & l à m, comme c à d, & m à n, comme e à f, je dis que k le premier terme ſera à n le dernier, comme ace le produit de tous les autres antécédens à bdf le produit de tous les autres conſéquens: car k eſt à l, comme a eſt à b, par l'hypothéſe; & nous trouverons que a eſt à b, comme ace eſt à bce par la multiplication des extrêmes & par celle des termes moyens; ainſi k eſt à l comme ace à bce; & par la même raiſon, l eſt à m, comme bce à bde, & m eſt à n comme bde à bdf; donc (*ex æquo*) k eſt à n comme ace à bdf.

Com-

Comment on tire les racines quarrées des Quantités Algébraïques simples.

17. L'extraction de la racine quarrée d'une Quantité Algébraïque simple est si aisée qu'il feroit inutile de s'y arrêter. Ainsi la racine de aa est + ou − a, la racine quarrée de $9aa$ est + ou − $3a$, & celle de $4aabb$ est + ou − $2ab$: c'est ce qui paroît clairement par la définition même de la racine quarrée; car la racine quarrée de quelque quantité, supposons de $4aabb$, est celle qui étant multipliée par elle-même produira $4aabb$: or la quantité $-2ab$ multipliée par elle-même produira $4aabb$, précisément comme feroit $+2ab$; d'où il suit qu'une de ces quantités n'est pas moins la racine quarrée que l'autre.

Quand la racine quarrée d'une quantité ne peut être tirée, on désigne la chose par cette marque $\sqrt{\ }$: ainsi le $\sqrt{2aa}$ signifie la racine quarrée de $2aa$; pareillement $\sqrt{aa-4b}$ signifie la racine quarrée de toute la quantité $\overline{aa-4b}$; de même encore $\frac{\sqrt{aa-4b}}{2a}$ désigne une fraction dont le Numérateur est la racine quarrée de toute la quantité $\overline{aa-4b}$, & dont le Dénominateur est $2a$; enfin, $\sqrt{\frac{4ab-a^3}{12a}}$ signifie la racine quarrée de toute la fraction $\frac{4ab-a^3}{12a}$, c'est-à-dire, la racine quarrée tant du Numérateur que du Dénominateur.

Quand on ne sauroit tirer exactement la racine quarrée de quelque quantité, on peut cependant quelquefois résoudre cette quantité en deux autres, dont l'une sera un quarré & l'autre point; & toutes les fois que cela est possible, la racine du quarré peut s'extraire, & le signe radical être mis au-devant de l'autre quantité: ainsi $12aa = 4aa \times 3$; donc $\sqrt{12aa} = 2a \times \sqrt{3}$.

Comment on tire les racines quarrées des Quantités Algébraïques composées.

18. L'extraction de la racine quarrée d'une Quantité Algébraïque composée ressemble si fort à celle des nombres entiers dans l'Arithmétique ordinaire, particuliérement en cas de séries où la chose est principalement nécessaire, qu'on feroit en quelque sorte fondé à croire, qu'un simple coup d'œil jetté sur l'opération suffiroit pour faire voir à tout homme tant soit peu exercé au calcul des nombres de quelle maniére il doit s'y prendre; mais si cela ne suffit pas, voici quelques directions accompagnées d'un exemple.

On demande d'extraire la racine quarrée de cette quantité $x^6 + 4x^5$

$+ 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16$: ici, je cherche d'abord le quarré du premier membre à la gauche, c'est-à-dire, de x^6, & je trouve que c'est x^3, que je mets au quotient: j'éléve ensuite au quarré x^3, & retranche x^6 de x^6, & il ne reste rien. Je continue mon opération sur les deux membres suivans, savoir, $4x^5 + 10x^4$, & je les divise par $2x^3$, qui est le double de la racine déjà placée au quotient, c'est-à-dire, je divise $4x^5$, premier membre de mon nouveau dividende, par $2x^3$, & le quotient est $2x^2$, que je mets au quotient après $2x^3$. Je multiplie ensuite la quantité $2x^3 + 2x^2$ par son dernier membre $2x^2$, & soustrais le produit $4x^5 + 4x^4$ du dividende $4x^5 + 10x^4$, & il reste $6x^4$: à ce reste j'ajoûte les deux membres suivans $20x^3 + 25x^2$, & forme ainsi un nouveau dividende $6x^4 + 20x^3 + 25x^2$: je divise cette quantité par le double de la racine déjà trouvée, c'est-à-dire, par $2x^3 + 4x^2$, divisant le premier membre de ce dividende par le premier membre de cette double racine, & le quotient est $+ 3x$, que j'ajoûte au quotient général & aussi après le diviseur $2x^3 + 4x^2$; puis multipliant tout ce quotient $2x^3 + 4x^2 + 3x$, par son dernier membre $3x$, le produit est $6x^4 + 12x^3 + 9x^2$, qui étant soustrait du dernier dividende, laisse $8x^3 + 16x^2$; j'ajoûte à ce reste les deux derniers membres $24x + 16$, & trouve ainsi un nouveau dividende $8x^3 + 16x^2 + 24x + 16$, que je divise par le double de la racine déjà trouvée, c'est-à-dire, par $2x^3 + 4x^2 + 6x$, & le quotient est $+ 4$; ce quotient étant mis au quotient général, & après le diviseur $2x^3 + 4x^2 + 6x$ me donne la quantité $2x^3 + 4x^2 + 6x + 4$, laquelle étant multipliée par son dernier membre 4, devient $8x^3 + 16x^2 + 24x + 16$: or si je retranche cette derniére quantité du dernier dividende, il ne reste rien; donc la racine totale est $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$. Voyez l'opération:

$$x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 24x + 16 \;(x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$
$$x^6$$

$2x^3 + 2x^2$) $* + 4x^5 + 10x^4$
$\quad + 2x^2$) $\quad 4x^5 + 4x^4$

$2x^3 + 4x^2 + 3x$) $* + 6x^4 + 20x^3 + 25x^2$
$\quad + 3x$) $\quad 6x^4 + 12x^3 + 9x^2$

$2x^3 + 4x^2 + 6x + 4$) $* + 8x^3 + 16x^2 + 24x + 16$
$\quad + 4$) $\quad 8x^3 + 16x^2 + 24x + 16$

* * * *

Au-

Autrement ainsi.

$$x^6+4x^5+10x^4+20x^3+25x^2+24x+16\,(x^3+2x^2+3x+4$$

$$\begin{array}{ll}
 & x^6 \\
\hline
2x^3+2x^2\left.\right) & * \\
\quad +2x^2\left.\right) & +4x^5+4x^4 \\
\hline
2x^3+4x^2+3x\left.\right) & *\quad +6x^4 \\
\quad\quad +3x\left.\right) & 6x^4+12x^3+9x^2 \\
\hline
2x^3+4x^2+6x+4\left.\right) & *\quad +\ 8x^3+16x^2 \\
\quad\quad\quad +4\left.\right) & 8x^3+16x^2+24x+16 \\
\hline
 & *\quad *\quad *\quad *
\end{array}$$

Le dernier membre $+16$ de la quantité donnée étant un quarré, j'aurois pu commencer l'extraction à ce bout-là, & la racine auroit été la même qu'auparavant, mais dans un ordre contraire.

N. B. Par un nombre quarré j'entends un nombre qui admet une racine quarrée; ainsi la quantité -16 n'est pas un nombre quarré, puisqu'il n'y a aucune racine, soit affirmative, soit négative, qui multipliée par elle-même puisse produire -16.

Pour donner encore un autre exemple, on demande d'extraire la racine quarrée de la quantité suivante, ou du moins d'en réduire la racine à l'expression la plus simple, $12x^3-72x^2+108x$: comme aucun des extrêmes de cette quantité n'est un quarré, il faut lui donner une forme plus convenable de la maniére suivante; si $12x^3$ sont divisés par $12x$, le quotient xx sera un nombre quarré: je divise donc le tout par $12x$, & le quotient est $xx-6x+9$; d'où j'infére, que $xx-6x+9$ étant multipliés par $12x$, le produit sera la quantité proposée, savoir, $12x^3-72x^2+108x$; donc par l'Art. 8. $\sqrt{12x^3-72x^2+108x}$ est égale à $\sqrt{xx-6x+9}$ multipliée par $12x$: mais $\sqrt{x^2-6x+9}$ étant tirée comme ci-dessus, est $x-3$, ou $3-x$; & comme $12x=4\times 3x$, nous avons $\sqrt{12x}=2\times\sqrt{3x}$; donc, $\sqrt{12x^3-72x^2+108x}=\overline{x-3}$ ou $\overline{3-x}$, multipliés par $2\times\sqrt{3x}=\overline{2x-6}$ ou $\overline{6-2x}$ multipliés par $\sqrt{3x}$. Si la racine quarrée du multiplicande $xx-6x+9$, n'avoit pas pu se tirer autrement, il y auroit pourtant eu moyen de l'avoir par approximation, comme celle du binome de l'Article suivant.

Tirer la racine quarrée d'un binome par le moyen d'une suite infinie.

19. J'entends ici par un binome une quantité composée de deux quantités simples liées par le signe $+$ ou $-$, comme $\overline{a+b}$, $\overline{1-z}$, &c.: or

or quoiqu'une pareille quantité ne puiſſe être exprimée par une ſuite finie de termes, elle peut l'être néanmoins par une ſuite infinie, comme dans les cas ſuivans.

1er Cas. La racine quarrée du binome $1+x$, ſuppoſant x moindre que l'unité, ſe trouve par l'opération ſuivante être $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+$ &c. La régularité de cette ſérie ne ſe remarque pas du premier coup d'œil; mais j'aurai ſoin de faire voir dans la ſuite de cet Ouvrage, que ces ſéries ſont auſſi réguliéres, & auſſi faciles à calculer que quelque autre que ce ſoit.

$$\begin{array}{lll}
 & 1+x\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ *\ * & \left(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+\&c.\right. \\
 & 1 & \\
2+\frac{x}{2}\Big) & *+x & \\
+\frac{x}{2} & x+\frac{x^2}{4} & \\
2+x-\frac{x^2}{8}\Big) & *-\frac{x^2}{4} & \\
-\frac{x^2}{8} & -\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64} & \\
2+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{16}\Big) & *+\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{64} & \\
+\frac{x^3}{16} & \frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16} & \\
2+x-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{8}-\frac{5x^4}{128}\Big) & *-\frac{5x^4}{64} & \\
-\frac{5x^4}{128} & -\frac{5x^4}{64} & \\
 & * &
\end{array}$$

Comme dans toutes ces ſéries, les puiſſances de x montent ou deſcendent réguliérement, on pourra tirer les racines, par le ſecours des ſeuls coëfficiens, & ſuppléer enſuite les puiſſances; mais il faut avoir ſoin alors de placer l'un ſous l'autre tous les termes du même genre, pour empêcher à cet égard qu'il ne ſe gliſſe quelque erreur dans l'opération.

Eſſayons préſentement ce que la racine ainſi trouvée nous donnera quand elle aura été multipliée par elle-même: mais avant que d'aller plus loin, j'avertirai le Lecteur, que comme cette racine ne s'étend point au-delà de la quatriéme puiſſance de x, on ne doit pas non plus s'attendre que le quarré de cette racine, quand elle aura été multipliée par elle-

elle-même, soit réel à un degré plus élevé; ainsi dans cette Multiplication toutes les puissances de x au-delà de la quatriéme puissance doivent être exclues du produit comme autant de termes inutiles. Cela étant, pour élever au quarré la quantité $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$, il faut la multiplier,

Premiérement par 1, & le produit sera	$1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4$ &c.
puis par $\frac{1}{2}x$, & le produit sera	$+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{32}x^4$ &c.
puis par $-\frac{1}{8}x^2$, & le produit sera	$-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{64}x^4$ &c.
puis par $\frac{1}{16}x^3$ & le produit sera	$+\frac{1}{16}x^3+\frac{1}{32}x^4$ &c.
puis par $-\frac{5}{128}$ & le produit sera	$-\frac{5}{128}x^4$ &c.
ajoûtez ces quantités ensemble & la somme se trouvera être	$1+x$ * * *

Comme en élevant cette racine au quarré, on n'a fait entrer en ligne de compte aucune des puissances de x au-delà de la quatriéme, de même en tirant la racine quarrée, il ne faut pas continuer l'opération plus loin que la puissance qui doit terminer la série, c'est-à-dire, que toutes les autres puissances doivent être exclues de l'opération, ainsi qu'elles le sont de la racine.

2d. Cas. On demande la racine quarrée du binome $1-z$: où z doit être plus petit que l'unité, sans quoi $1-z$ se trouveroit une quantité négative, & ne sauroit avoir de racine quarrée: mettez donc $-z$ au-lieu de x dans le cas précédent, & vous aurez $xx=+z^2$, $x^3=-z^3$, $x^4=+z^4$ &c.; $\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}z$, $-\frac{1}{8}x^2=-\frac{1}{8}z^2$, $+\frac{1}{16}x^3=-\frac{1}{16}z^3$, $-\frac{5}{128}x^4=-\frac{5}{128}z^4$ &c.: donc $\sqrt{1-z}=1-\frac{1}{2}z-\frac{1}{8}z^2-\frac{1}{16}z^3-\frac{5}{128}z^4-$ &c.

3ème Cas. On demande la racine quarrée du binome $z+1$, supposant z plus grand que l'unité: ici quoique 1 soit un nombre quarré, par cela même que la racine doit être exprimée par une suite infinie convergente, la suite ne doit tirer son origine que de la plus grande partie du binome, c'est-à-dire, depuis z: divisez donc la quantité $z+1$ par z, & le quotient sera $1+\frac{1}{z}$, où $\frac{1}{z}$ sera plus petit que 1, à cause que z est plus grand que l'unité: puis donc que $\frac{z+1}{z}$ est égal à $1+\frac{1}{z}$, il s'ensuit que $\overline{1+\frac{1}{z}}\times z=z+1$; par conséquent $\sqrt{1+\frac{1}{z}}\times\sqrt{z}=\sqrt{z+1}$: mettez $\frac{1}{z}$ à la place de x dans le premier cas, & vous aurez $\sqrt{1+\frac{1}{z}}$ $=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{z}-\frac{1}{8}\times\frac{1}{z^2}+\frac{1}{16}\times\frac{1}{z^3}-\frac{5}{128}\times\frac{1}{z^4}$ &c. $=1+\frac{1}{2z}-\frac{1}{8z^2}$

 +

$+\frac{1}{16z^3}-\frac{5}{128z^4}$ &c.: supposez cette série continuée à l'infini, & vous aurez pour somme totale $\sqrt{z+1}=s\sqrt{z}$, c'est-à-dire, $s\times\sqrt{z}$.

4éme Cas. On demande d'exprimer par une suite infinie la racine quarrée du binome $a+b$: en supposant que a est la plus grande partie du binome: ici $\frac{a+b}{a}=1+\frac{b}{a}$ donc $\overline{1+\frac{b}{a}}\times a=a+b$; mais $\sqrt{1+\frac{b}{a}}$ par le premier cas est $1+\frac{b}{2a}-\frac{b^2}{8a^2}+\frac{b^3}{16a^3}-\frac{5b^4}{128a^4}$ &c.: supposez cette série continuée à l'infini, & vous aurez $\sqrt{a+b}=s\sqrt{a}$.

Préparations pour la démonstration de la règle par le moyen de laquelle on trouve le plus grand Diviseur commun de deux nombres donnés.

20. Avant d'éclaircir par des exemples les différentes maniéres de réduire des fractions Algébraïques, je m'attacherai à donner quelques idées de la règle, par le moyen de laquelle on trouve la plus grande mesure commune, ou, ce qui revient au même, le plus grand commun diviseur de deux nombres proposés: règle fort utile pour les fractions ordinaires, & quelquefois aussi en Algébre, quand tant le Numérateur que le Dénominateur d'une fraction sont des quantités composées.

La chose auroit déjà été faite si je n'avois pas craint qu'une pareille Démonstration ne fût peut-être pas à la portée des commençans: & cette crainte subsiste encore en partie: que s'ils la trouvent trop difficile, le meilleur avis que je puis leur donner, est de la passer, jusqu'à ce qu'à force d'attention & d'exercice leur imagination se soit plus familiarisée avec ces sortes d'objets.

Pour faciliter l'intelligence de cette règle & de la Démonstration qui y a rapport, je ferai précéder quelques définitions & quelques axiômes.

Déf. 1. *Un nombre est dit en mesurer un autre, quand il est exactement contenu dans cet autre sans aucun surplus ou reste.* Ainsi on peut dire que le nombre 3 mesure 12, à cause qu'il est contenu dans 12 exactement quatre fois.

2. *Un nombre s'appelle la mesure commune de deux autres, quand il les mesure tous deux.* Ainsi 3 est la mesure commune de 12 & de 21.

AXIOME I.

Si une quantité en mesure une autre, & que cette autre en mesure une troisiéme, en ce cas la premiére mesure la troisiéme. Comme si le nombre 3 mesuroit 12, & que le nombre 12 mesurât 24, le nombre 3 mesurera 24.

AXIOME

AXIOME 2.

Si un nombre est la mesure commune de deux autres, il sera la mesure de leur somme & de leur différence. Ainsi le nombre 3, qui est la mesure commune de 12 & de 21, mesurera leur somme 33, & leur différence 9; car si le nombre 3 est contenu quatre fois dans 12, & sept fois dans 21, il faut qu'il soit contenu onze fois dans leur somme, à cause que $4+7=11$; & qu'il soit contenu trois fois dans leur différence, à cause que $7-4=3$.

AXIOME 3.

Si un nombre est divisé par un autre, & qu'il y ait quelque reste, ôtez ce reste du dividende, & le diviseur mesurera le reste. Par exemple, si l'on divise 14 par 3, & qu'il reste 2, ôtez 2 de 14, & le nombre 3 mesurera le reste, qui est 12. Ce théorême peut s'exprimer d'une maniére générale en ces termes: *Si* a *est divisé par* b, *& qu'il reste* c, *alors* b *mesurera* $\overline{a-c}$.

La règle expliquée & démontrée.

21. Tout ceci posé, je viens présentement à la règle qu'il faut suivre pour trouver la plus grande mesure commune de deux nombres proposés: Voici quelle est cette règle. *Soient* a *&* b *les deux nombres, dont il s'agit de trouver la mesure commune, savoir* a *le plus grand &* b *le plus petit: que* a *soit divisé par* b, *& sans s'embarrasser du quotient, que le reste soit* c; *alors divisez* b *par* c, *& que le reste soit* d; *divisez alors* c *par* d, *& que le reste soit* e; *enfin divisez* d *par* e, *& qu'il n'y ait plus aucun reste; je dis alors, que ce dernier diviseur* e, *qui n'a point de reste, sera non seulement la mesure commune de* a *& de* b, *mais aussi la plus grande mesure commune dont ces nombres soient susceptibles.*

Commençons par prouver que e est la mesure commune de a & de b; ce que je fais ainsi:

1. e mesure d par l'hypothése; & d mesure $\overline{c-e}$, par le troisiéme axiôme, à cause que quand c étoit divisé par d, le reste étoit e; donc e mesure $\overline{c-e}$, par le premier axiôme; mais e se mesure lui-même; donc e mesure e & $\overline{c-e}$; mais la somme de e de $\overline{c-e}$ est c; donc e mesure c, par le second axiôme.

2. Nous venons de prouver que e mesure c; mais c mesure $\overline{b-d}$; donc e mesure $\overline{b-d}$; mais e mesure d par l'hypothése; donc e mesure tant d que $\overline{b-d}$; mais la somme de d & de $\overline{b-d}$ est b; donc e mesure b.

3. Il

3. Il a été prouvé que e meſure b; & b meſure $\overline{a-c}$; donc e meſure $\overline{a-c}$; mais il a été prouvé auparavant, que e meſuroit c; donc e meſure tant c que $\overline{a-c}$; or la ſomme de c & de $\overline{a-c}$ eſt a; donc e meſure a. Ainſi nous avons démontré la premiére partie de notre aſſertion, qui étoit, que e eſt la meſure commune de a & de b.

En revenant à-préſent ſur nos pas, nous nous propoſons de faire voir, que e eſt auſſi la plus grande meſure commune des nombres a & b: ſi on le nie, ſuppoſons que f, plus grand que e, ſoit pourtant une meſure commune de a & de b, & voyons ce qui réſultera de cette ſuppoſition.

1. f meſure b, & b meſure $\overline{a-c}$; donc f meſure $\overline{a-c}$; or f meſure a par l'hypothéſe; donc f meſure tant a que $\overline{a-c}$; mais la différence entre a & $\overline{a-c}$ eſt c; donc f meſure c par le ſecond axiôme.

2. f meſure c, comme on vient de dire, & c meſure $\overline{b-d}$; donc f meſure $\overline{b-d}$; or f meſure b par la ſuppoſition; donc f meſure b & $\overline{b-d}$; mais * la différence entre b & $\overline{b-d}$ eſt d; donc f meſure d.

3. f meſure d, & d meſure $\overline{c-e}$; donc f meſure $\overline{c-e}$; mais f meſure c, comme il a déja été prouvé; ainſi f meſure tant c & que $\overline{c-e}$; mais la différence entre c & $\overline{c-e}$ eſt e; donc f meſure e; c'eſt-à-dire, qu'une plus grande quantité en meſure une plus petite, ce qui eſt abſurde; donc la ſuppoſition, que a & b pouvoient admettre une plus grande meſure commune que e, étoit fauſſe; car la vérité ne conduit jamais à une conſéquence abſurde; donc e eſt la plus grande meſure commune dont les deux nombres a & b ſoient ſuſceptibles. C. Q. F. D.

N. B. Cette Démonſtration eſt la même que celle d'*Euclide* tant ſoit peu changée, & peut ſervir d'échantillon de la ſubtilité d'eſprit des Anciens.

L'Article 7. de l'Introduction contient un exemple de la règle précédente.

COROLLAIRE.

1. Si en trouvant la plus grande meſure commune, nous ne pouvons point avoir de diviſeur ſans reſte qu'en parvenant à l'unité, nous en devons conclurre que les nombres propoſés ſont *premiers entre eux*, c'eſt-à-dire tels,

* *Mais la différence entre* b & b-d *eſt* d.] Ceux qui auront quelque peine à concevoir ceci, feront bien de ſe rappeller, que la différence de deux quantités ſe trouve par la ſouſtraction, & que pour ſouſtraire une quantité de l'autre, il n'y a qu'à l'y ajoûter avec des ſignes contraires: ainſi pour ſouſtraire $b-d$ de b, je n'ai qu'à ajoûter à b, $-b+d$; & comme b & $-b$ ſe détruiſent, il me reſtera d.

tels, qu'ils n'admettent aucune autre mesure que l'unité: car, *comme tout nombre est appellé nombre premier, quand il n'admet aucun autre diviseur que lui-même & l'unité; ainsi deux nombres sont dits premiers entre eux, quand ils n'admettent que l'unité comme diviseur commun.*

2. *Tout nombre qui en mesure deux autres, mesurera aussi leur plus grand diviseur commun*: c'est ainsi que dans la supposition que le nombre f mesuroit a & b, nous avons prouvé qu'il mesuroit pareillement e, leur plus grande mesure commune.

Les différentes règles données au sujet des Fractions éclaircies par des exemples en Quantités Algébraïques.

22. Les fractions se manient en Algébre précisément comme dans l'Arithmétique ordinaire. C'est ce qui paroîtra par les exemples suivans.

Exemples de la maniére de réduire des Fractions composées à de plus simples termes. Voyez Introd. Art. 7.

La fraction $\frac{4ab}{6bc}$, si l'on divise le Numérateur & le Dénominateur par la même quantité $2b$, sera réduite à la fraction $\frac{2a}{3c}$, qui est de même valeur que la premiére, mais exprimée plus simplement: d'où nous inférons, que toutes les fois qu'une même lettre se trouve dans chaque membre du Numérateur & du Dénominateur, elle peut être effacée par-tout sans altérer en rien la valeur de la fraction: ainsi la fraction $\frac{ac+bc}{cd+ce}$, si l'on efface c, devient $\frac{a+b}{d+e}$, & est la même en valeur que la premiére; mais s'il y a quelque membre où le Multiplicateur en question ne se trouve pas, il ne faut l'effacer nulle part: ainsi la fraction $\frac{ac+bc}{cd+e}$, ne sauroit être réduite à de plus simples termes, à cause que la quantité e n'est point multipliée par c.

N. B. Effacer ici n'est pas soustraire, mais diviser: ainsi effacer la lettre b dans la quantité ab, qu'on réduit par cette opération à n'être plus simplement que a, n'est pas soustraire b de ab, mais diviser ab par b, ce qui donne pour quotient a.

Exemples des Fractions réduites à la même dénomination. Voyez Intr. Art. 8.

1. Les fractions $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{3}$ & $\frac{c}{4}$, étant réduites à la même dénomition, seront $\frac{12a}{24}$, $\frac{8b}{24}$ & $\frac{6c}{24}$. 2. Les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ réduites de-même,

me, feront $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$. 3. Les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ & $\frac{x}{y}$, aprés leur réduction, se trouveront être $\frac{psuy}{qsuy}$, $\frac{qruy}{qsuy}$, $\frac{qsty}{qsuy}$ & $\frac{qsux}{qsuy}$. Et il est bon d'observer ici que la règle prescrite pour cette réduction, se démontre présentement elle-même: car on voit clairement dans l'exemple proposé, que toutes ces fractions, quoique réduites sous une autre forme, conservent néanmoins leurs premiéres valeurs; c'est ainsi que la premiére fraction $\frac{psuy}{qsuy}$ se trouve, si l'on efface les Multiplicateurs communs, réduite à $\frac{p}{q}$, sa premiére valeur; & la même remarque est applicable à toutes les autres. Au reste, cet exemple comprend une démonstration proprement dite, par cela même qu'il est exprimé en termes généraux. 4. Les fractions $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ & $\frac{1}{c}$, réduites à la même dénomination, deviennent $\frac{bc}{abc}$, $\frac{ac}{abc}$ & $\frac{ab}{abc}$. 5. Enfin $\frac{1}{a+b}$ & $\frac{1}{a-b}$, après la réduction dont il s'agit, deviennent $\frac{a-b}{aa-bb}$ & $\frac{a+b}{aa-bb}$: car le nombre 1, Numérateur de la premiére fraction, multiplié par $a-b$, Dénominateur de la seconde, fait $a-b$; & pareillement 1, Numérateur de la seconde fraction, multiplié par $a+b$, Dénominateur de la premiére, fait $a+b$; & le produit des deux Dénominateurs $a+b$ & $a-b$, multipliés l'un par l'autre, est $aa-bb$, comme dans le quatriéme exemple de l'Art. 9. de l'Introduction.

Exemples d'Addition en fractions. Voyez Introd. Art. 9.

1. Les fractions $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ & $\frac{-c}{2}$, ajoûtées ensemble font $\frac{a+b-c}{2}$.

2. La fraction $\frac{a+b}{2}$ ajoûtée à $\frac{a-b}{2}$, fait $\frac{2a}{2}$ ou a.

3. Les fractions $\frac{a}{2}$, $\frac{-b}{3}$ & $\frac{+c}{4}$, ajoûtées ensemble font $\frac{12a-8b+6c}{24}$.

4. La fraction $\frac{a}{b}$ ajoûtée à la fraction $\frac{c}{d}$ fait $\frac{ad+bc}{bd}$.

5. a ajoûté à $\frac{b}{c}$, c'est-à-dire, $\frac{a}{1}$ ajoûté à $\frac{b}{c}$ fait $\frac{ac+b}{c}$.

6. $\frac{1}{a}$ ajoûté à $-\frac{1}{b}$ fait $\frac{b-a}{ab}$.

7. Les fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$, $\frac{t}{u}$ & $\frac{x}{y}$, ajoûtées ensemble, font $\frac{psuy+qruy+qsty+qsux}{qsuy}$.

8.

8. $\frac{a}{b}$ ajoûté à $\frac{1}{c}$ donne $\frac{ac+b}{bc}$.

9. $\frac{1}{a+b}$ ajoûté à $\frac{1}{a-b}$ donne $\frac{2a}{aa-bb}$. Voyez le 5ème exemple des fractions réduites à la même dénomination.

Exemples de Soustraction en Fractions. Voyez Introd. Art. 10.

Premiérement, si les signes, tant du Numérateur que du Dénominateur, sont changés, ce qui n'est autre chose que la multiplication de l'un & l'autre de ces termes par -1, la valeur de la fraction restera la même.

En second lieu, le Dénominateur d'une fraction est toujours supposé affirmatif; & toutes les fois qu'il arrive que cela n'est pas, il faut le rendre affirmatif en changeant les signes des deux termes.

En troisiéme lieu, $+\frac{a}{b}$ & $-\frac{a}{b}$ sont la même chose que $\frac{+a}{b}$ & $\frac{-a}{b}$, comme il paroît par la nature même de la division: la seule différence consiste en ce que quelquefois cette derniére façon de marquer ces quantités est plus commode que la premiére.

En quatriéme lieu, il suit de l'Article précédent, que le signe du Numérateur est le signe de toute la fraction; & que quand on donne au Numérateur un autre signe, c'est précisément comme si on en donnoit un autre à la fraction même.

En cinquiéme lieu, quand il faut soustraire une fraction Algébraïque d'une autre, la meilleure méthode est de changer le signe du Numérateur de la fraction qu'il est question de soustraire, & de la placer après l'autre, & puis de réduire les deux fractions à une seule: car si l'on différe la soustraction jusqu'à ce que la réduction soit faite, on pourroit se tromper, & soustraire ce qui doit rester. Ainsi

1°. $\frac{4b}{5}$ étant soustrait de $\frac{2a}{3}$, il reste $\frac{2a}{3} - \frac{4b}{5} = \frac{10a-12b}{15}$.

2°. $\frac{r}{s}$ étant soustraits de $\frac{p}{q}$, il reste $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-qr}{qs}$.

3°. $\frac{b}{c}$ étant soustrait de a, il reste $\frac{a}{1} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}$.

4°. $\frac{1}{a+b}$ étant soustrait de $\frac{1}{a-b}$, il reste $\frac{1}{a-b} \frac{-1}{a+b} = \frac{2b}{aa-bb}$.

Exemples de Multiplication en fractions.

La multiplication des fractions se fait, en multipliant le Numérateur & le Dénominateur du Multiplicande par le Numérateur & par le Dénominateur du Multiplicateur respectivement.

Ainsi 1°. $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$.

2°. $\frac{3p}{4q}\times\frac{5q}{6r}=\frac{15pq}{24qr}=\frac{5p}{8r}$.

3°. $\frac{a}{b}\times c$ ou $\frac{a}{b}\times\frac{c}{1}=\frac{ac}{b}$.

4°. $\frac{a}{b}\times b=\frac{ab}{b}=a$.

5°. $\frac{3a}{4b}\times 20b=\frac{60ab}{4b}=15a$.

6°. $\frac{4a}{5}\times\frac{7}{8a}=\frac{28a}{40a}=\frac{7}{10}$.

7°. $\frac{3a}{4b}\times\frac{3a}{4b}=\frac{9aa}{16bb}$.

8°. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

9°. $\overline{a+\frac{b}{c}}\times d$, ou $\frac{\overline{ac+b}}{c}\times\frac{d}{1}=\frac{acd+bd}{c}$.

10°. $\overline{d+\frac{e}{f}}\times\frac{g}{b}$, ou $\frac{df+e}{f}\times\frac{g}{b}=\frac{dfg+eg}{fb}$.

11°. $\overline{a+\frac{b}{c}}\times\overline{d+\frac{e}{f}}$, ou $\frac{ac+b}{c}\times\frac{df+e}{f}=\frac{acdf+ace+bdf+be}{cf}$.

Cette derniére multiplication pouvoit aussi se faire ainsi:

$$d+\frac{e}{f}.$$
$$a+\frac{b}{c}$$
$$\overline{ad+\frac{ae}{f}+\frac{bd}{c}+\frac{be}{cf}}.$$

12°. $\overline{a+\frac{b}{c}}\times\overline{a+\frac{b}{c}}=\frac{aacc+2abc+bb}{cc}$.

Ou $aa+\frac{2ab}{c}+\frac{bb}{cc}$. Voyez l'opération.

$$a+\frac{b}{c}.$$
$$a+\frac{b}{c}.$$

$aa+$

$$\overline{aa + \frac{ab}{c}} + \frac{bb}{ce}.$$
$$+ \frac{ab}{c}.$$
$$\overline{aa + \frac{2ab}{c} + \frac{bb}{ce}}.$$

Exemples de Division en fractions.

La Division en fractions se fait en multipliant les termes directs du dividende par les termes inverses du diviseur: ainsi,

1\. $\frac{r}{s}) \ \frac{p}{q} \ (\frac{ps}{qr}.$ 2. $\frac{b}{c}) \ \frac{1}{a} \ (\frac{c}{ab}.$

3\. $\frac{1}{c}) \ \frac{a}{b} \ (\frac{ac}{b}.$ 4. $c\ ) \ \frac{a}{b} \ (\frac{a}{bc}.$

5\. $\frac{1}{c}) \ \frac{ab}{c} \ (\frac{abc}{c}$, ou ab. 6. $\overline{d + \frac{e}{f}}) \ a + \frac{b}{c} \ (\frac{acf + bf}{cdf + ce}.$

7\. $\sqrt{b}) \ \sqrt{a} \ (\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$: car si l'on fait $x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ on aura $xx = \frac{a}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Je n'ajoûterai plus qu'un exemple, qui sera rélatif à la règle de proportion: *Si* $\frac{a}{b}$ *donne* $\frac{c}{d}$, *que donnera* $\frac{e}{f}$? Réponse, $\frac{bce}{adf}$: car $\frac{c}{d}$ le second nombre multiplié par $\frac{e}{f}$ le troisiéme, produit $\frac{ce}{df}$; & cette quantité divisée par le premier membre $\frac{a}{b}$ donne pour quotient $\frac{bce}{adf}$.

Des Equations en Algébre, & particuliérement des Equations simples. Comment on résout ces Equations.

23\. Une équation en Algébre est une proposition dans laquelle une quantité est déclarée égale à une autre, ou dans laquelle une expression d'une quantité est déclarée égale à une autre expression de la même quantité; comme, par exemple $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$; où $\frac{3}{4}$ forment un côté de l'équation, & $\frac{6}{8}$ l'autre côté.

Une équation du second degré est une équation composée de trois différentes sortes de quantités; l'une, dans laquelle se trouve le quarré de la quantité inconnue; l'autre, où se trouve la premiére puissance de

cette même inconnue; & une troisiéme, où l'inconnue ne se trouve absolument point: comme si $xx-2x=3$, & que x fût la quantité inconnue.

Si le terme où se trouve la premiére puissance de x, comme $-2x$, ou celle qu'on nomme le terme absolu, savoir 3, manquoit, l'équation seroit toujours du second degré quoique incomplette. A-la-vérité, quelques Algébristes rangent cette derniére sorte d'équations sous la dénomination d'équations simples; & nous en ferons de-même, à cause de la facilité qu'il y a à les résoudre, quoique, à proprement parler, une équation simple soit celle dans laquelle se trouve une simple puissance de la quantité inconnue, à l'exclusion de toute autre; comme $3x=6$ $2x+3=4x-5$, &c.

L'usage de ces équations est de représenter plus distinctément les conditions des Problêmes, quand, au-lieu d'employer le langage ordinaire, on veut les exprimer en stile Algébraïque. Comme, par exemple: on demande un nombre qui ait la propriété suivante, savoir, que ses $\frac{2}{3}$, plus 4, soient égaux à ses $\frac{7}{12}$, plus 9: ici, mettant x pour la quantité inconnue, la condition de ce Problême, exprimé Algébraïquement, sera représentée par l'équation suivante, savoir; $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$; car $\frac{2}{3}$ de x, c'est-à-dire, $\frac{2}{3}$ de $\frac{x}{1}$ font $\frac{2x}{3}$; donc $\frac{2x}{3}+4$ signifient $\frac{2}{3}$ de x avec quatre de plus; & puisque cette expression, suivant le Problême, désigne une quantité égale à $\frac{7x}{12}+9$, on est en droit de placer entre elles le signe d'égalité.

On a pu voir dans l'équation précédente, aussi-bien que dans la plupart des autres qui naissent immédiatement des conditions du Problême, que la quantité inconnue se trouve embarrassée & mêlée avec d'autres quantités connues: la dégager de ces sortes de quantités, desorte qu'elle occupe seule un des côtés de l'équation, & se trouve égale à la somme des quantités connues qui occupent l'autre côté, c'est-à-dire, dans le présent cas, déterminer la valeur de la quantité inconnue x, est ce qu'on appelle ordinairement résoudre une équation. Pour en venir à bout, nous commencerons par poser quelques axiômes, & quelques-unes des règles dont l'usage est le plus fréquent. Pour ce qui est de celles dont on a plus rarement besoin, je les indiquerai à mesure que l'occasion s'en présentera.

De

De la résolution des Equations simples.

AXIOME 1.

Quand une fraction doit être multipliée par un nombre entier, il suffira de multiplier le Numérateur par ce nombre, en laissant le Dénominateur tel qu'il étoit auparavant. Ainsi $\frac{4}{7}$ multipliés par 2 donnent $\frac{8}{7}$, par la même raison qui fait que 4 schellings multipliés par 2 donnent 8 schellings: ainsi dans le premier des exemples suivans, $\frac{7x}{12}$ multipliés par 3, donnent $\frac{21x}{12}$.

AXIOME 2.

Mais si le nombre entier par lequel la fraction doit être multipliée, est égal au Dénominateur de la fraction, en ce cas, négligez le Dénominateur, & le Numérateur seul formera le produit. Ainsi la fraction $\frac{a}{b}$, multipliée par b, donne $\frac{ab}{b}=a$: de-même dans le premier exemple $\frac{2x}{3}$, multipliés par 3, donnent $2x$; & $\frac{21x}{12}$, multipliés par 12, donnent $21x$.

AXIOME 3.

Si les deux côtés ou membres d'une équation sont multipliés ou divisés par le même nombre, les deux produits, ou les deux quotiens seront encore égaux entre eux. Ainsi dans le premier exemple, où $\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9$, si les deux membres de l'équation sont multipliés par 3, on aura $2x+12=\frac{21x}{12}+27$; & si l'on multiplie encore cette derniére équation par 12, on aura $24x+144=21x+324$.

AXIOME 4.

Si l'on ôte quelque quantité d'un des membres d'une équation, & qu'on la mette dans l'autre membre avec un signe contraire, ce qu'on appelle communément transposition, les deux membres conserveront leur égalité. Si dans l'équation $7+3=10$, on transpose $+3$, on aura $7=10-3$: si dans l'équation $7-3=4$, on transpose -3, on aura $7=4+3$: de-même, si (comme dans le premier exemple) $24x+144=21x+324$, on aura, en transposant $21x$, l'équation $24x-21x+144=324$, c'est-à-dire,

dire, $3x+144=324$; & puis encore, en tranſpoſant 144, il viendra $3x=324-144=180$.

Il ſuit de ce que nous venons de dire, que la tranſpoſition Algébraïque n'eſt autre choſe qu'un nom général pour déſigner l'addition ou la ſouſtraction de quantités égales dans les deux membres d'une équation; ainſi il n'y a pas lieu d'être ſurpris ſi les ſommes ou les différences continuent à être égales. Comme, par exemple, dans cette équation $a-b=c$, tranſpoſant $-b$, nous avons $a=c+b$: & qu'eſt ceci après tout, ſinon ajoûter b, tant à l'un qu'à l'autre membre de l'équation? car ſi b eſt ajoûté à $a-b$, la ſomme ſera a; & ſi b eſt ajoûté à c, la ſomme ſera $c+b$; donc $a=c+b$: mais ſi dans l'équation $a+b=c$, on tranſpoſoit $+b$, on auroit $a=c-b$, ce qui n'eſt autre choſe que ſouſtraire b des deux membres de l'équation.

Premiére Règle.

Si, quand il s'agit de réſoudre une équation, on trouve des fractions dans un des membres ou dans tous les deux, il faut s'en défaire en multipliant toute l'équation par les Dénominateurs de ces fractions l'un après l'autre.

Seconde Règle.

Après que l'équation eſt ainſi dégagée de fractions, ſi la quantité inconnue ſe trouve des deux côtés de l'équation, il faut, par le ſecours de la tranſpoſition, la faire paſſer d'un ſeul & même côté, ſavoir, du côté qui après la réduction, donnera l'inconnue affirmée.

Troiſiéme Règle.

Après cela, ſi quelques quantités connues ſe trouvent du même côté que l'inconnue, il faut auſſi par la tranſpoſition les faire paſſer de l'autre côté.

Quatriéme Règle.

Tout étant fait juſques-là, ſi la quantité inconnue a devant elle quelque coëfficient, diviſez les deux membres par ce coëfficient, & l'équation ſera réſolue.

Cinquiéme Règle.

S'il y a moyen de diviſer toute l'équation par la grandeur inconnue, il faut faire cette diviſion, & l'équation ſe trouvera réduite à une autre plus ſimple. C'eſt ainſi que dans le 16éme exemple, nous aurons $615x-7xxx=48x$; diviſez toute l'équation par x, & elle ſera changée en celle-ci, $615-7xx=48$.

Dans

Dans le 13ème. exemple vous avez $\frac{42x}{x-2} = \frac{35x}{x-3}$; divisez toute l'équation par x, ce qui se fait en divisant simplement les numérateurs des deux fractions, & vous aurez $\frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3}$.

Sixiéme Règle.

Si, à la fin de l'opération, ce n'est point la quantité inconnue elle-même; mais cette quantité élevée au quarré, qui paroît égale à la grandeur connue, qui forme l'autre membre de l'équation, en ce cas la quantité inconnue doit être rendue égale à la racine quarrée de celle qui est connue. C'est ainsi que dans le 14ème exemple nous avons $xx=36$; *par conséquent* $x=6$, *& point* 18: *dans le 15ème exemple nous avons* $xx=64$; *donc* $x=8$, *racine quarrée de* 64, *& pas* 32, *sa moitié.*

Exemples de la manière de résoudre des Equations simples.

24. Nous allons présentement donner quelques exemples de la maniére de résoudre des équations du premier degré.

Exemple 1.

$$\frac{2x}{3}+4=\frac{7x}{12}+9.$$

Il est clair d'abord, que dans cette équation il y a deux fractions, $\frac{2x}{3}$ & $\frac{7x}{12}$, dont il faut se défaire par deux opérations différentes. Voici comment on doit s'y prendre: comme le dénominateur de la premiére fraction est 3, multipliez toute l'équation par 3, & vous aurez $2x+12=\frac{21x}{12}+27$: puis, comme le dénominateur de la seconde fraction est 12, multipliez toute l'équation par 12, & vous aurez $24x+144=21x+324$: équation dégagée de toute fraction.

2. Considérons ensuite, que dans cette derniére équation $24x+144=21x+324$, la quantité inconnue se trouve dans les deux membres, savoir, $24x$ d'un côté, & $21x$ de l'autre: ainsi il faut transposer $21x$, ce qui donnera $24x-21x+144=324$, c'est-à-dire, $3x+144=324$. Que si l'on demande, pourquoi je transpose $21x$ plutôt que $24x$, ma réponse est, que si $24x$ avoient été transposés, la grandeur inconnue, ou du-moins son coëfficient, après la réduction, auroit été une quantité négative, ce qui est contraire à la seconde règle; car reprenant l'équation $24x+144=21x+324$, si l'on transpose $24x$, on aura

$144 = 21x - 24x + 324$, c'eſt-à-dire, $144 = -3x + 324$; mais même dans ce cas, tout peut ſe raccommoder par une nouvelle tranſpoſition; car ſi l'on tranſpoſe $3x$ dans cette derniére équation, on aura $3x + 144 = 324$, comme auparavant: ainſi tout ce qu'on peut alléguer contre cette derniére méthode, eſt qu'elle engage à des tranſpoſitions inutiles.

3. Après avoir rendu l'équation beaucoup plus ſimple qu'elle ne l'étoit auparavant, ſavoir, $3x + 144 = 324$; comme la grandeur inconnue $3x$ ſe trouve encore accompagnée de la quantité connue 144, il faut tranſpoſer cette quantité dans l'autre membre de l'équation, ce qui donne $3x = 324 - 144$, c'eſt-à-dire, $3x = 180$.

N. B. Par une quantité connue qui en accompagne une autre inconnue, j'entends une quantité qui eſt ajoûtée à l'inconnue par le ſigne +, ou qui en eſt retranchée par le ſigne −, & non une quantité qui la multiplie, comme le coëfficient 3 dans la derniére équation.

4. La grandeur x ne ſauroit à-préſent guéres tarder à être connue; car ſi $3x = 180$, il n'y a qu'à diviſer toute l'équation par 3, & nous aurons $x = 60$: ainſi 60 eſt le nombre, dont il a été dit dans le dernier Article, que ſes $\frac{2}{3}$ avec 4 de plus, formeront une grandeur égale à ſes $\frac{7}{12}$ avec 9 de plus: & que le nombre de 60 ait cette propriété, eſt une choſe facile à prouver ſynthétiquement; car les $\frac{2}{3}$ de 60 ſont 40: en ajoûtant 4, on a 44; de plus $\frac{7}{12}$ de 60 ſont 35: en ajoûtant 9 on a auſſi 44.

N. B. Une démonſtration qui prouve la connexion qu'il y a entre quelque nombre & la propriété qu'on lui attribue, eſt, ou analytique, ou ſynthétique: ſi cette connexion ſe prouve en déduiſant le nombre de cette propriété, on nomme cette démonſtration analytique; mais ſi on la prouve en déduiſant cette propriété du nombre même, la démonſtration eſt appellée alors ſynthétique.

Exemple 2.

$$\frac{2x}{3} + 12 = \frac{4x}{5} + 6.$$

Ici multipliez toute l'équation par 3, & vous aurez $2x + 36 = \frac{12x}{5} + 18$: multipliez enſuite cette nouvelle équation par 5, & vous aurez $10x + 180 = 12x + 90$; tranſpoſez $10x$ & vous aurez $180 = 12x - 10x + 90$; c'eſt-à-dire, $180 = 2x + 90$, ou plutôt $2x + 90 = 180$; car généralement parlant, j'aime mieux placer la grandeur inconnue dans le premier membre de l'équation: tranſpoſez 90 & vous aurez $2x = 180 - 90$, c'eſt-à-dire, $2x = 90$: diviſez toute l'équation par 2, & vous aurez $x = 45$.

La

La Preuve.

L'équation originale étoit $\frac{2x}{3}+12=\frac{4x}{5}+6$: or si $x=45$, nous avons $\frac{2x}{3}=30$, & $\frac{2x}{3}+12=42$: de plus nous avons $\frac{4x}{5}=36$, & $\frac{4x}{5}+6=42$; donc $\frac{2x}{3}+12=\frac{4x}{5}+6$, à cause que chacune de ces équations est égale à 42.

Exemple 3.

$\frac{3x}{4}+5=\frac{5x}{6}+2$: donc $3x+20=\frac{20x}{6}+8$; donc $18x+120=20x+48$; donc $120=20x-18x+48$, c'est-à-dire, $120=2x+48$; donc $120-48=2x$, c'est-à-dire, $2x=72$; donc $x=36$.

La Preuve.

L'équation originale étoit $\frac{3x}{4}+5=\frac{5x}{6}+2$: or si $x=36$, nous aurons $\frac{3x}{4}=27$, & $\frac{3x}{4}+5=32$: nous aurons aussi $\frac{5x}{6}=30$, & $\frac{5x}{6}+2=32$; donc si $x=36$, nous aurons $\frac{3x}{4}+5=\frac{5x}{6}+2$.

Exemple 4.

$\frac{7x}{8}-5=\frac{9x}{10}-8$: donc $7x-40=\frac{72x}{10}-64$; donc $70x-400=72x-640$; donc $-400=72x-70x-640$, c'est-à-dire, $-400=2x-640$, ou plutôt $2x-640=-400$; donc $2x=640-400$, c'est-à-dire, $2x=240$; & $x=120$.

La Preuve.

L'équation originale est $\frac{7x}{8}-5=\frac{9x}{10}-8$; mais $x=120$; donc $\frac{7x}{8}=105$; donc $\frac{7x}{8}-5=100$: de plus $\frac{9x}{10}=108$; donc $\frac{9x}{10}-8=100$; donc $\frac{7x}{8}-5=\frac{9x}{10}-8$.

Exemple 5.

$\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$: donc $5x - 72 = 666 - \frac{63x}{12}$; donc $60x - 864 = 7992 - 63x$; donc $60x + 63x - 864 = 7992$, c'est-à-dire, $123x - 864 = 7992$; donc $123x = 7992 + 864$, c'est-à-dire, $123x = 8856$; & $x = 72$.

La Preuve.

L'équation originale est $\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$; $x = 72$; donc $\frac{5x}{9} = 40$; donc $\frac{5x}{9} - 8 = 32$: de plus $\frac{7x}{12} = 42$; donc $74 - \frac{7x}{12} = 74 - 42 = 32$; donc $\frac{5x}{9} - 8 = 74 - \frac{7x}{12}$.

Exemple 6.

$\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$: donc $x - 24 = 144 - \frac{6x}{8}$; donc $8x - 192 = 1152 - 6x$; donc $8x + 6x - 192 = 1152$, c'est-à-dire, $14x - 192 = 1152$; donc $14x = 1152 + 192$, c'est-à-dire $14x = 1344$; & $x = 96$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$; $x = 96$; $\frac{x}{6} = 16$; $\frac{x}{6} - 4 = 12$: de plus, $\frac{x}{8} = 12$; donc $24 - \frac{x}{8} = 24 - 12 = 12$; donc $\frac{x}{6} - 4 = 24 - \frac{x}{8}$.

Exemple 7.

$56 - \frac{3x}{4} = 48 - \frac{5x}{8}$: donc $224 - 3x = 192 - \frac{20x}{8}$; donc $1792 - 24x = 1536 - 20x$; donc $1792 = 1536 + 24x - 20x$, c'est à-dire, $1792 = 1536 + 4x$; donc $1792 - 1536 = 4x$, c'est-à-dire, $4x = 256$; & $x = 64$.

La Preuve.

L'équation originale $56 - \frac{3x}{4} = 48 - \frac{5x}{8}$; $x = 64$; donc $\frac{3x}{4} = 48$; donc

donc $56 - \frac{3x}{4} = 56 - 48 = 8$: de plus $\frac{5x}{8} = 40$; donc $48 - \frac{5x}{8} = 48 - 40 = 8$; donc $56 - \frac{3x}{4} = 48 - \frac{5x}{8}$.

Exemple 8.

$36 - \frac{4x}{9} = 8$: donc $324 - 4x = 72$; donc $324 = 72 + 4x$; donc $324 - 72 = 4x$, c'eſt-à-dire, $4x = 252$; & $x = 63$.

La Preuve.

L'équation originale. $36 - \frac{4x}{9} = 8$; $x = 63$; donc $\frac{4x}{9} = 28$; donc $36 - \frac{4x}{9} = 36 - 28 = 8$.

Exemple 9.

$\frac{2x}{3} = \frac{176 - 4x}{5}$: donc $2x = \frac{528 - 12x}{5}$; donc $10x = 528 - 12x$; donc $10x + 12x = 528$, c'eſt-à-dire, $22x = 528$; & $x = 24$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{2x}{3} = \frac{176 - 4x}{5}$; $x = 24$; donc $\frac{2x}{3} = 16$: de plus, $4x = 96$; donc $176 - 4x = 176 - 96 = 80$; donc $\frac{176 - 4x}{5} = \frac{80}{5} = 16$; donc $\frac{2x}{3} = \frac{176 - 4x}{5}$.

Exemple 10.

$\frac{3x}{4} + \frac{180 - 5x}{6} = 29$: donc $3x + \frac{720 - 20x}{6} = 116$; donc $18x + 720 - 20x = 696$, c'eſt-à-dire, $720 - 2x = 696$; donc $720 = 2x + 696$; donc $720 - 696 = 2x$, c'eſt-à-dire, $2x = 24$; & $x = 12$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{3x}{4} + \frac{180 - 5x}{6} = 29$; $x = 12$; donc $\frac{3x}{4} = 9$;

 $5x = 60$;

$5x=60$; donc $180-5x=180-60=120$; donc $\frac{180-5x}{6}=\frac{120}{6}=20$; donc $\frac{3x}{4}+\frac{180-5x}{6}=29$.

Exemple 11.

$$\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}.$$

Multipliez par $2x+3$, & vous aurez $45=\frac{114x+171}{4x-5}$; multipliez par $4x-5$, & vous aurez $180x-225=114x+171$; donc $180x-114x-225=171$, c'est-à-dire, $66x-225=171$; donc $66x=171+225$, c'est-à-dire, $66x=396$; & $x=6$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}$; $x=6$; donc $2x=12$; donc $2x+3=15$; donc $\frac{45}{2x+3}=\frac{45}{15}=3$: de plus $4x=24$; donc $4x-5=19$; donc $\frac{57}{4x-5}=\frac{57}{19}=3$; donc $\frac{45}{2x+3}=\frac{57}{4x-5}$.

Exemple 12.

$\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$: donc $128=\frac{648x-864}{5x-6}$; donc $640x-768=648x-864$; donc $-768=648x-640x-864$, c'est-à-dire, $-768=8x-864$; donc $+864-768=8x$, c'est-à-dire, $8x=96$; & $x=12$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$; $x=12$; donc $3x=36$; donc $3x-4=32$; donc $\frac{128}{3x-4}=\frac{128}{32}=4$: de plus, $5x=60$; donc $5x-6=54$; donc $\frac{216}{5x-6}=\frac{216}{54}=4$; donc $\frac{128}{3x-4}=\frac{216}{5x-6}$.

Exemple 13.

$\frac{42x}{x-2}=\frac{35x}{x-3}$: divisez les deux numérateurs par x, & vous aurez

rez $\frac{42}{x-2} = \frac{35}{x-3}$; donc $42 = \frac{35x-70}{x-3}$; donc $42x - 126 = 35x - 70$; donc $42x - 35x - 126 = -70$, c'est-à-dire, $7x - 126 = -70$; donc $7x = 126 - 70$, c'est-à-dire, $7x = 56$; & $x = 8$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{42x}{x-2} = \frac{35x}{x-3}$; $x = 8$; donc $x - 2 = 6$; $42x = 336$; donc $\frac{42x}{x-2} = \frac{336}{6} = 56$: de plus, $x - 3 = 5$, & $35x = 280$; donc $\frac{35x}{x-3} = \frac{280}{5} = 56$; donc $\frac{42x}{x-2} = \frac{35x}{x-3}$.

Exemple 14.

$\frac{xx-12}{3} = \frac{xx-4}{4}$: donc $xx - 12 = \frac{3xx-12}{4}$; donc $4xx - 48 = 3xx - 12$; donc $4xx - 3xx - 48 = -12$, c'est-à-dire, $xx - 48 = -12$; donc $xx = +48 - 12$, c'est-à-dire, $xx = 36$; & $x = 6$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{xx-12}{3} = \frac{xx-4}{4}$; $x = 6$; donc $xx = 36$; donc $xx - 12 = 24$; donc $\frac{xx-12}{3} = \frac{24}{3} = 8$: de plus $xx - 4 = 32$; donc $\frac{xx-4}{4} = \frac{32}{4} = 8$; donc $\frac{xx-12}{3} = \frac{x^2-4}{4}$.

Exemple 15.

$\frac{5xx}{16} - 8 = 12$: donc $5xx - 128 = 192$; donc $5xx = 192 + 128$, c'est-à-dire, $5xx = 320$; donc $xx = 64$; & $x = 8$.

La Preuve.

L'équation originale $\frac{5xx}{16} - 8 = 12$; $x = 8$; donc $xx = 64$; donc $5xx = 320$; donc $\frac{5xx}{16} = \frac{320}{16} = 20$; donc $\frac{5xx}{16} - 8 = 20 - 8 = 12$.

Exem-

Exemple 16.

$615x - 7xxx = 48x$: divisez le tout par x, & vous aurez $615 - 7xx = 48$; donc $615 = 7xx + 48$; donc $615 - 48 = 7xx$, c'est-à-dire, $7xx = 567$; donc, $xx = 81$; & $x = 9$.

La Preuve.

L'équation originale $615x - 7xxx = 48x$; $x = 9$; donc $xx = 81$; donc $xxx = 729$; $7xxx = 5103$; de plus, $615x = 5535$; donc $615x - 7xxx = 5535 - 5103 = 432$: enfin, $48x = 432$; donc $615x - 7xxx = 48x$.



ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE II.

Préparations pour les solutions des Problêmes Algébraïques.

ART. 25. EN résolvant les Problêmes suivans, je ferai usage d'une sorte d'Algébre mixte, n'employant des lettres que pour représenter des quantités inconnues, & des nombres pour les quantités qu'on connoît. Cette méthode me paroît devoir d'abord être la meilleure; mais après cela, quand le jeune Algébriste aura fait quelques pas de plus dans la carriére que je lui ouvre, je me propose de l'initier aux mystéres de l'Algébre pure, qui est infiniment plus étendue que l'Arithmétique, non seulement parce qu'elle lui fournit le moyen de trouver analytiquement des solutions générales, qui comprennent tous les cas particuliers rélatifs à la solution du Problême auquel ils appartiennent, mais aussi parce qu'elle le met en état de démontrer les mêmes solutions ou théorêmes synthétiquement.

Et comme je ne le dois pas encore supposer versé dans la connoissance des Mathématiques, mes Problêmes auront, généralement parlant, rapport aux nombres, considérés d'une maniére abstraite, ou rélativement aux usages ordinaires de la vie.

Si un Problême est bien proposé, il faut qu'il renferme en soi autant de conditions indépendantes l'une de l'autre, expressément ou implicitement, qu'il y a de quantités inconnues à déterminer; & le principal but de l'Algébriste doit être de découvrir & de bien distinguer ces conditions, avant que de tenter la solution de son Problême.

Je dis qu'autant de conditions doivent être contenues dans le Problême expressément ou implicitement, à cause qu'il peut arriver qu'une condition ne se trouve point exprimée dans un Problême, & que cependant elle y soit par la nature même de la chose: ainsi dans le Problême 44, où plusieurs perches doivent être dressées perpendiculairement en ligne droite, à certains intervalles l'une de l'autre, il y a implicitement, que le nombre des intervalles doit être plus petit d'une unité que le nombre des perches.

Quelquefois on peut insérer dans un Problême une condition, qui

renferme deux conditions, ou plus de deux: comme quand nous disons que quatre nombres sont en proportion continue, nous entendons par-là non seulement, que le premier nombre est au second, comme le second est au troisiéme; mais aussi que le second est au troisiéme, comme le troisiéme est au quatriéme.

Toutes les fois qu'on demande la solution Algébraïque d'un Problême, l'Algébriste doit substituer quelque lettre de l'Alphabet à la place de la quantité inconnue; & s'il y a plus d'une quantité inconnue, les autres doivent tirer leur nom d'autant de conditions du Problême. Si le Problême est bien posé il restera à la fin une condition, qui exprimée en langage Algébraïque fournira une équation, dont la solution donnera la quantité inconnue, à la place de laquelle la substitution avoit été faite; & dès que cette quantité inconnue est trouvée, le reste l'est bientôt. Supposons qu'il y ait quatre quantités inconnues dans un Problême, en ce cas il doit aussi y avoir quatre conditions: or la premiére quantité inconnue se désigne arbitrairement sans aucune condition; ainsi les trois autres doivent prendre trois des conditions du Problême pour leurs noms; & la quatriéme condition restera pour fournir une équation.

La méthode que je me propose de suivre dans les quarante-quatre Problêmes suivans, sera de donner la réponse immédiatement après l'exposé du Problême, & d'ajoûter ensuite la solution; car, à mon avis, cette méthode de donner d'abord la réponse, éclaircit non seulement la solution qui va suivre, mais sert aussi à fixer davantage sur le Problême l'attention des commençans, trop sujets à se forger des chiméres, qui ne s'accordent aucunement avec les conditions du Problême.

Après que le jeune Algébriste aura parcouru quelques-uns de ces Problêmes, & se trouvera un peu au fait de la méthode qu'il faut suivre pour les résoudre, il fera bien de recommencer, & d'entreprendre la solution de chaque Problême, sans avoir recours aux solutions données ici, à moins qu'il ne puisse absolument point en sortir autrement: mais après l'opération faite, il peut comparer sa solution avec la nôtre, & y faire les changemens qu'il jugera à propos.

Solution de quelques Problêmes, qui se réduisent à des équations simples.

PROBLEME I.

26. *On demande deux nombres, dont la différence est* 14 *& la somme* 48.

Rép. Ces nombres sont 31 & 17: car $31 - 17 = 14$; & $31 + 17 = 48$.

So-

SOLUTION.

Il y a dans ce Problême deux quantités inconnues, favoir, les deux nombres cherchés; & il y a deux conditions; premiérement, qu'il reste 14, après que le plus petit nombre aura été soustrait du plus grand; & secondement, que la somme des deux nombres soit égale à 48: ainsi je désigne le plus petit nombre par x; & pour trouver un nom au plus grand, j'ai recours à la premiére condition du Problême, savoir, que la différence entre les deux nombres cherchés est égale à 14, donc par cela même que j'appelle le plus petit nombre x, je dois appeller le plus grand $x+14$: de cette maniére j'ai trouvé des noms à mes deux quantités inconnues, & il me reste encore une condition en réserve pour une équation, savoir, la seconde condition exprimée dans le Problême: or suivant cette seconde condition, les deux nombres, ajoûtés ensemble, font 48; mais x & $x+14$, ajoûtés ensemble, font $2x+14$; ce qui me donne cette équation, $2x+14=48$; donc $2x+14=48-14=34$; donc x, ou le plus petit nombre $=17$, & $x+14$, ou le plus grand nombre $=31$, comme ci-dessus.

Dans notre solution de ce Problême, la maniére de désigner les inconnues a été empruntée de la premiére condition, & l'équation l'a été de la seconde; cependant il y auroit eu moyen de faire précisément le contraire, en s'y prenant de la maniére suivante: soit x le plus petit nombre cherché; cela étant, puisque la somme des deux nombres est 48, si l'on retranche le plus petit nombre x de 48, le reste $48-x$ fera le plus grand nombre, desorte que les deux nombres cherchés seront x & $48-x$; retranchez le premier nombre du dernier, & le reste ou la différence sera $48-2x$; mais suivant la premiére condition du Problême, cette différence doit être 14; donc $48-2x=14$; résolvez cette équation, & vous aurez $x=17$, & $48-x=31$, comme ci-dessus.

PROBLEME 2.

27. *Trois personnes* A, B *&* C, *fournissent ensemble une somme de 76 livres st. on ignore quelle portion* A *contribue, mais on sait que* B *donne autant que* A *&* 10 *livres st. de plus; & que* C *fournit une somme égale à celles de* A *& de* B *ensemble. On demande leurs différentes contributions.*

Rép. *A* donne 14 livres, B 24, & *C* 38: car $14+10=24$, & $14+24=38$, & $14+24+38=76$.

SOLUTION.

Dans ce Problême il y a trois quantités inconnues, & trois conditions pour les trouver: premiérement, toute la contribution monte à 76 livres: secondement, *B* contribue autant que *A*, & dix livres de plus: & enfin, *C* contribue autant que *A* & *B* ensemble.

Tout ceci étant supposé, je désigne d'abord la contribution de *A* par la lettre x; puis, comme suivant la seconde condition *B* contribue autant que *A* & dix livres de plus, j'appelle la contribution de *B*, $x+10$; enfin puisque *C* contribue autant que *A* & *B* ensemble, j'ajoûte ensemble x & $x+10$, ce qui me donne $2x+10$ pour exprimer la contribution de *C*: par ce moyen j'ai trouvé des noms à toutes mes quantités inconnues, & il me reste encore une condition, que je n'ai point considérée, & propre à être tournée en équation, savoir, que toutes les contributions ajoûtées ensemble font 76 livres; j'ajoûte donc ensemble x, & $x+10$, & $2x+10$, & suppose la somme $4x+20=76$; donc $4x=76-20=56$; donc la contribution de *A* est égale à 14; la contribution de *B* est égale à 24, & celle de *C* à 38 comme ci-dessus.

PROBLEME 3.

28. *Tout étant supposé de-même que dans le Problême précédent, excepté qu'à présent toute la contribution monte à 276 livres, dont* A *donne une portion inconnue,* B *donne le double de* A, *& 12 livres par dessus, &* C *trois fois autant que* B, *& outre cela encore 12 livres, je demande leurs contributions respectives.*

Rép. *A* contribue 24 livres, *B* 60 & *C* 192: car $24\times 2+12=60$; & $60\times 3+12=192$; & $24+60+192=276$.

SOLUTION.

Désignez la contribution de *A* par x; comme *B* contribue deux fois autant que *A*, & douze livres de plus, la contribution de *B* sera $2x+12$; donc si *C* avoit contribué précisément trois fois autant que *B*, sa contribution auroit été $6x+36$; mais suivant le Problême *C* contribue cette somme, & 12 livres de plus, ainsi la contribution de *C* est $6x+48$; ajoûtez ensemble ces contributions, savoir, x, $2x+12$, & $6x+48$, & vous aurez $9x+60=276$; donc $9x=276-60=216$; & x, ou la contribution de *A*, $=24$; donc $2x+12$, ou la contribution de $B=60$; & $6x+48$, ou la contribution de *C*, $=192$, comme ci-dessus.

AVIS.



AVIS.

Je ne fais si ce n'est pas faire tort à la pénétration du jeune Algébriste, que de l'avertir, qu'aussitôt que x est trouvé égal à 24, les deux autres quantités inconnues, $2x+12$, & $6x+48$, se trouvent en substituant 24 au-lieu de x.

PROBLEME 4.

29. *Un Marchand commence son négoce avec une certaine somme, qu'il fait si bien valoir, qu'au bout de l'an il se trouve avoir le double de son premier capital, horsmis cent livres st. qu'il a employées en dépenses ordinaires; & il continue de-même chaque année, doublant toujours le fonds de l'année précédente, excepté cent livres st. dépensées, comme auparavant; & au bout de trois ans, il se trouve trois fois plus riche qu'il n'étoit en commençant son trafic: on demande quel fonds il a mis dans son commerce.*

Rép. 140. livres st.: car le double de cette somme est 280, & $280-100=180$ livres au bout de la premiére année; le double de cette somme est 360, & $360-100=260$ livres au bout de la seconde année; enfin le double de cette derniére somme est 520, & $520-100=420$ livres au bout de la troisiéme année: & la somme de 420 livres est précisément triple de celle de 140 livres, qui étoit son premier fonds.

SOLUTION.

Mettez ici x pour son premier fonds, c'est-à-dire, que x désigne le nombre de livres st. avec lequel il a commencé son négoce; le double de cette somme est $2x$, & par conséquent il aura $2x-100$ au bout de la premiére année; le double de cette somme est $4x-200$; donc il aura $4x-200-100$, c'est-à-dire, $4x-300$, au bout de la seconde année; le double de cette somme est $8x-600$; donc il aura $8x-600-100$, c'est-à-dire, $8x-700$ au bout de la troisiéme année; mais suivant le Problême, il doit avoir le triple de son premier capital, c'est-à-dire $3x$, au bout de la troisiéme année; par conséquent $8x-700=3x$; donc $8x-3x-700=0$, c'est-à-dire $5x-700=0$; donc $5x=700$; & x, ou son premier capital $=140$, comme ci-dessus.

J'ajoûterai à ce Problême un autre du même genre, dont le Lecteur pourra lui-même chercher la solution.

Quelqu'un va avec une certaine somme d'argent au cabaret, où il emprunte une somme égale à celle qu'il a en poche, & du tout il dépense un schelling: il va avec le reste à un second cabaret, où il emprunte de-nouveau autant

d'argent qu'il en porte ſur lui, & dépenſe encore un ſchelling; puis il ſe rend à une troiſiéme, & enſuite à un quatriéme cabaret, empruntant toujours & dépenſant comme auparavant; après quoi il ne lui reſte plus rien; je demande combien d'argent il avoit d'abord ſur lui.

Rép. $\frac{15}{16}$ d'un ſchelling.

PROBLEME 5.

30. *Un homme a ſix fils, dont chacun a quatre ans de plus que ſon frére puis-né; & le plus âgé a trois fois l'âge du plus jeune: Quels ſont leurs âges reſpectifs?*

Rép. 10, 14, 18, 22, 26, 30; car 30, âge de l'aîné, vaut trois fois 10, c'eſt-à-dire, trois fois l'âge du plus jeune.

SOLUTION.

Pour leurs différens âges mettez x, $x+4$, $x+8$, $x+12$, $x+16$, $x+20$; ſuivant le Problême $x+20$ âge de l'aîné, doit être égal à $3x$, c'eſt-à-dire, à trois fois l'âge du plus jeune; puis donc que $3x=x+20$, nous aurons $3x-x=20$, c'eſt-à-dire, $2x=20$, & $x=10$, comme ci-deſſus.

PROBLEME 6.

31. *La tête d'un certain poiſſon a 9 pouces de long; la queue eſt auſſi longue que la tête & la moitié du corps; & le corps a la même longueur que la tête & la queue enſemble: je demande la longueur du corps & de la queue.*

Rép. La longueur du corps eſt de 36 pouces, & celle de la queue de 27; car $27=9+\frac{36}{2}$; & $36=9+27$.

SOLUTION.

Déſignez la longueur du corps par x: cela étant x eſt égal à la longueur de la tête & de la queue enſemble, par la ſuppoſition; donc ſi de x, longueur de la tête & de la queue enſemble, je retranche 9, longueur de la tête, il reſtera $x-9$ pour la longueur de la queue; mais ſuivant le Problême la queue eſt auſſi longue que la tête, & que la moitié du corps; donc $x-9=\frac{x}{2}+9$; donc $2x-18=x+18$; donc $2x-x-18=18$, c'eſt-à-dire, $x-18=18$; & x longueur du corps $=18+18=36$; donc $x-9$, longueur de la queue, $=27$, comme ci-deſſus.

PROBLEME 7.

32. *Quelqu'un a obtenu un répit de 99 ans: étant interrogé ſur le tems du*

répit

répit déjà écoulé, il répond que les deux tiers de ce tems sont égaux aux quatre cinquièmes de celui qui doit s'écouler encore : je demande l'un & l'autre de ces tems.

Rép. Le tems passé est de 54 ans; & le nombre total des années 99; donc jusqu'à l'expiration du terme, il reste encore 45 ans : or $\frac{2}{3}$ de $54=36$; & $\frac{4}{5}$ de 45 aussi $=36$.

SOLUTION.

Nommez le tems passé x: cela étant, puisque la somme totale des années est 99, si l'on soustrait le tems passé x, de 99 le tems entier, il restera $99-x$ pour le tems à venir; mais les $\frac{2}{3}$ du tems passé $\frac{2x}{3}$, & les $\frac{4}{5}$ du tems avenir sont $\frac{4}{5}$ de $\frac{99-x}{1}=\frac{396-4x}{5}$: donc $\frac{2x}{3}=\frac{396-4x}{5}$; donc $2x=\frac{1188-12x}{5}$; donc $10x=1188-12x$; donc $10x+12x=1188$, c'est-à-dire, $22x=1188$; & le tems écoulé $x=54$ ans; donc $99-x$, tems à écouler encore, $=45$ ans.

J'ajoûterai à ce Problême deux autres de même nature, sans aucune solution.

Premiérement, *Le nombre 84 doit être divisé en deux parties telles, que l'une trois fois prise soit égale à l'autre prise quatre fois.*

Rép. Les parties sont 48 & 36: car en premier lieu, $48+36=84$; & en second lieu, trois fois $48=144=$ a quatre fois 36.

Secondement, *Il faut diviser le nombre 60 en deux parties telles, que la septième partie de l'une égale la huitième partie de l'autre.*

Rép. Les parties sont 28 & 32; car en premier lieu $28+32=60$; & en second lieu, $\frac{1}{7}$ de $28=4=\frac{1}{8}$ de 32.

PROBLEME 8.

33. *On demande de diviser le nombre 50 en deux parties telles, que les $\frac{3}{4}$ de l'une ajoûtés aux $\frac{5}{6}$ de l'autre, puissent faire 40.*

Rép. Les parties sont 20 & 30: car en premier lieu, $20+30=50$; & en second lieu, $\frac{3}{4}$ de 20, c'est-à-dire 15, ajoûtés à $\frac{5}{6}$ de 30, savoir 25, font 40.

SOLUTION.

Mettez x pour une des parties inconnues, & par conséquent $50-x$ pour l'autre partie; vous aurez alors $\frac{3}{4}$ de $x=\frac{3x}{4}$, & $\frac{5}{6}$ de $50-x=\frac{250-5x}{6}$; mais suivant le Problême, ces deux nombres ajoûtés ensemble doivent faire

faire 40; ce qui donne cette équation $\frac{3x}{4}+\frac{250-5x}{6}=40$: multipliez le tout par 4, & vous aurez $3x+\frac{1000-20x}{6}$; multipliez ensuite l'équation par 6, & vous aurez $18x+1000-20x=960$, c'est-à-dire, $1000-2x=960$; donc $1000=2x+960$; & $1000-960=2x$, c'est-à-dire, $2x=40$, & x, qui est une des parties cherchées, sera 20; donc l'autre partie, ou $50-x$, sera $=30$, comme ci-dessus.

Voici encore deux autres Problêmes du même genre.

Premiérement: *On demande de partager* 30 *en deux parties telles, que l'une d'elles étant prise trois fois, & ajoûtée à l'autre prise cinq fois, la somme soit* 84.

Rép. Les parties sont 8 & 12; car $8+12=20$, & $8\times3+12\times5$, c'est-à-dire, $24+60=84$.

Secondement: *On demande de partager* 100 *en deux parties telles, que si l'on soustrait le* $\frac{1}{3}$ *de l'une du* $\frac{1}{4}$ *de l'autre, le reste soit* 11.

Rép. Les parties sont 24 & 76: car premiérement, 24 ajoûtés à 76 font 100; & secondement $\frac{1}{3}$ de 24, c'est-à-dire 8, soustrait d'un $\frac{1}{4}$ de 76, qui est 19, laisse 11.

PROBLEME 9.

34. *Deux hommes* A & B *se mettent au jeu. Le premier a* 72 *guinées, & l'autre* 52 *avant qu'ils commencent à jouer; & après un certain nombre de parties tant gagnées que perdues,* A *se léve avec trois fois autant de guinées que* B: *je demande le gain de* A.

Rép. 21: car $72+21=93$; & $52-21=31$; & $93=31\times3$.

SOLUTION.

Mettez x pour le nombre de guinées gagné par A, & conséquemment perdu par B; ainsi la somme avec laquelle A s'est levé, se trouve être $72+x$, & celle de B dans ce même tems $52-x$: or suivant le Problême, cette somme finale de A vaut le triple de la somme finale de B; c'est-à-dire, est égale à trois fois $\overline{52-x}$, ou à $156-3x$; donc $72+x=156-3x$; donc $72+x+3x=156$, c'est-à-dire, $72+4x=156$; donc $4x=156-72=84$; donc x, nombre des guinées gagné par A, est égal à 21, comme ci-dessus.

PROBLEME 10.

35. *Un homme rencontrant une troupe de mendians, donne à chacun d'eux quatre sous, & a seize sous de reste; mais s'il avoit voulu donner six sous à chacun*

chacun d'eux, il lui auroit manqué douze sous pour cela: je demande le nombre des mendians.

Rép. 14: car $14 \times 4 + 16 = 72 = 14 \times 6 - 12$.

SOLUTION.

Désignez le nombre des mendians par x; cela étant, puisque chacun d'eux a reçu quatre sous, le nombre des sous sera quatre fois plus grand que celui des mendians, c'est-à-dire, $4x$; donc $4x + 16 =$ au nombre de sous que l'homme avoit sur lui; & la même somme pourra être exprimée par $6x - 12$; donc $4x + 16 = 6x - 12$; donc $16 = 6x - 4x - 12 = 2x - 12$; donc $2x = 16 + 12 = 28$; & x, nombre des mendians $= 14$, comme ci-dessus.

PROBLEME II.

36. *On demande deux nombres, ayant pour différence 4, & 112 pour différence de leurs quarrés.*

Rép. 12 & 16: car $16 - 12 = 4$, & $16 \times 16 - 12 \times 12$, c'est-à-dire, $256 - 144 = 112$.

SOLUTION.

Le plus petit nombre, x.	$x + 4$
Le plus grand, $x + 4$.	$x + 4$
	$xx + 4x + 16$
	$+ 4x$
Le quarré du plus grand,	$xx + 8x + 16$
Le quarré du plus petit,	xx

La différence de leurs quarrés, * $8x + 16$; donc $8x + 16 = 112$; donc $8x = 112 - 16 = 96$; donc x, le plus petit nombre, vaut 12, & le plus grand, $x + 4$, est égal à 16, comme ci-dessus.

PROBLEME 12.

37. *On demande quels sont deux nombres, dont le plus grand est triple du plus petit, & qui pris chacun cinq fois sont égaux à la somme de leurs quarrés.*

Rép. Les nombres sont 6 & 2, dont la somme est 8: or $6 = 3$ fois 2; & $6 \times 6 + 2 \times 2 = 40 = 5$ fois 8.

SOLUTION.

Le plus petit nombre,	x.
Le plus grand,	$3x$.
Leur somme,	$4x$.
Le quarré du plus petit,	xx.
Le quarré du plus grand,	$9xx$.
La somme de leurs quarrés,	$10xx$.

 Mais

Mais suivant le Problême, la somme de leurs quarrés vaut cinq fois la somme des nombres, c'est-à-dire, 5 fois $4x$ ou $20x$; donc $10xx = 20x$; & $10x = 20$; & x le plus petit nombre $= 2$; donc $3x$, le plus grand nombre, $= 6$, comme ci-dessus.

PROBLEME 13.

38. *On demande deux nombres, dont le plus petit soit au plus grand comme 2 à 3, & dont le produit vaille 6 fois la somme des nombres mêmes.*

Rép. Ces nombres sont 10 & 15, dont la somme est 25; car 10 est à 15, comme 2 à 3: ces nombres satisfont aussi à la seconde condition du Problême; car $10 \times 15 = 150 = 25 \times 6$.

SOLUTION.

Appellez le plus petit nombre x; puis pour trouver le plus grand dites, si 2 donnent 3, que donnera x? & la réponse est $\frac{3x}{2}$; donc si x est le plus petit nombre, le plus grand sera $\frac{3x}{2}$; leur somme sera $\frac{x}{1} + \frac{3x}{2}$, ou $\frac{2x+3x}{2}$, ou $\frac{5x}{2}$; & le produit de leur multiplication $x \times \frac{3x}{2}$ ou $\frac{3xx}{2}$; mais suivant le Problême, le produit de leur multiplication doit être égal à six fois la somme des nombres, c'est-à-dire, à six fois $\frac{5x}{2}$, ou $\frac{30x}{2}$; donc $\frac{3xx}{2} = \frac{30x}{2}$; & $3xx = 30x$; & $3x = 30$; & x le plus petit nombre égal à 10; donc le plus grand nombre, savoir $\frac{3x}{2} = 15$, comme ci-dessus.

PROBLEME 14.

39. A *dit à* B, *donnez-moi cinq schellings de votre argent, & j'en aurai précisément autant qu'il vous en restera: non, dit* B, *donnez-moi plutôt cinq schellings du vôtre, & j'aurai alors le triple de ce qui vous restera à vous: combien chacun d'eux avoit-il d'argent?*

Rép. *A* avoit 15 schellings, & *B* 25: car en ce cas, si *A* emprunte 5 schellings de *B*, ils auront chacun 20 schellings; & d'une autre côté, si *A* prête 5 schellings à *B*, *A* aura 10 schellings de reste, & *B* en aura 30, c'est-à-dire, trois fois autant.

So-

SOLUTION.

Défignez par x l'argent de A; cela étant, fi A emprunte 5 fchellings de B, fon argent fera $x+5$, & il reftera pareillement $x+5$ à B, par la fuppofition; mais fi B, après avoir prêté 5 fchellings à A, garde encore $x+5$, il faut qu'il ait eu $x+10$ auparavant; donc fi x repréfente l'argent de A, $x+10$ repréfentera celui de B: fuppofons préfentement que B emprunte 5 fchellings de A, alors B aura $x+15$, & l'argent de A fera $x-5$; mais fuivant le Problême, B doit avoir en ce cas trois fois plus d'argent qu'il n'en refte à A, c'eft-à-dire, trois fois $\overline{x-5}$, ou $3x-15$; donc $3x-15=x+15$; donc $3x-x-15=15$, c'eft-à-dire, $2x-15=15$; donc $2x=15+15=30$; donc x, c'eft-à-dire, l'argent de A vaut 15 fchellings, & $x+10$, argent de B, en vaut 25, comme ci-deffus.

PROBLEME 15.

40. *On demande deux nombres, dont le produit eft* 108, *& dont la fomme eft égale à deux fois leur différence.*

Rép. 18 & 6: car le produit de leur multiplication eft 108, & leur fomme 24 eft égale à deux fois leur différence 12.

SOLUTION.

J'appelle le plus grand nombre x; fi leur fomme avoit été 108, j'aurois à la place de l'autre nombre mis $108-x$; mais ce n'eft pas la fomme de leur addition, mais le produit de leur multiplication, qui eft $=108$; par conféquent fi un des nombres s'appelle x, l'autre doit être appellé $\frac{108}{x}$, ce que je démontre ainfi: foit cet autre nombre y; en ce cas $x \times y$, ou $xy=108$ par la fuppofition; divifez les deux membres de l'équation par x, & vous aurez $y=\frac{108}{x}$; ce qu'il falloit démontrer. La différence entre le plus grand nombre x, & le plus petit $\frac{108}{x}$ eft $x-\frac{108}{x}$, & leur fomme eft $x+\frac{108}{x}$: mais par la condition du Problême, cette fomme doit être égale à deux fois la différence des nombres, c'eft-à-dire, à deux fois $\overline{x-\frac{108}{x}}$ ou $2x-\frac{216}{x}$; donc $2x-\frac{216}{x}=x+\frac{108}{x}$; donc $2xx-216=xx+108$; donc $2xx-xx-216=108$, c'eft-à-dire, $xx-216=108$; donc $xx=108+216=324$; donc x, qui eft le plus grand

grand nombre, vaut 18, & $\frac{108}{x}$, qui eſt le plus petit, en vaut 6, comme il a été dit.

PROBLEME 16.

41. *On demande de partager* 48 *en deux parties telles, que l'une ſoit trois fois autant au-deſſus de* 20, *que l'autre eſt au-deſſous.*

Rép. Les deux parties ſont 32 & 16; car $32+16=48$; de plus le nombre 32 ſurpaſſe 20 de 12, & il manque 4 à celui de 16 pour être égal à 20; enfin, $3\times4=12$.

SOLUTION.

Soit x le plus petit nombre; alors $48-x$ ſera le plus grand; & l'excès du plus grand par-deſſus 20 ſera $28-x$: de plus l'excès de 20 par-deſſus le plus petit nombre (c'eſt-à-dire, ce qui manque au plus petit nombre pour être égal à 20) eſt $20-x$; & ſuivant le Problême, le premier excès eſt égal à trois fois le dernier, c'eſt-à-dire, à trois fois $\overline{20-x}$, ou à $60-3x$; ce qui nous donne cette équation, $28-x=60-3x$; donc $28-x+3x=60$, c'eſt-à-dire, $28-2x=60$; donc $2x=60-28=32$; donc x la plus petite partie $=16$, & la plus grande, ſavoir $48-x$, $=32$, comme ci-deſſus.

Autre Solution de ce Problême.

Déſignez par x ce qui manque au plus petit nombre pour être égal à 20; ce nombre ſera alors $20-x$, le plus grand $20+3x$, & leur ſomme $40+2x$; mais leur ſomme, par l'hypothéſe, eſt 48; donc $40+2x=48$; donc $2x=48-40=8$; donc $x=4$; & $20-x$, le plus petit nombre $=16$; & $20+3x$, le plus grand nombre $=32$.

PROBLEME 17.

42. *Un marchand a trois débiteurs,* A, B *&* C; *mais il a oublié ce que chacun d'eux lui doit, & ſe ſouvient ſeulement, que les dettes de* A *& de* B, *ajoûtées enſemble montent à* 60 *guinées; celles de* A *& de* C *à* 80; *& celles de* B *& de* C *à* 92: *on demande ce que chacun d'eux lui devoit.*

Rép. La dette de *A* eſt de 24 guinées, celle de *B* de 36, & enfin celle de *C* de 56: car $24+36=60$, $24+56=80$, & $36+56=92$.

SOLUTION.

Nommez la dette de *A*, x; cela étant, comme les dettes de *A* & de *B*, ajoûtées enſemble font 60 guinées, la ſeule dette de *B* ſera $60-x$: de plus,

plus, comme *A* & *C* doivent ensemble 80 guinées, la seule dette de *C* doit être $80-x$: or puisque, suivant le problême, les dettes de *B* & de *C*, ajoûtées ensemble, montent à la somme de 92 guinées, j'ajoûté $60-x$ & $80-x$ ensemble, & suppose la somme $140-2x=92$; d'où il suit que $2x+92=140$, & $2x=140-92=48$; & x, c'est-à-dire, la dette de *A* $=24$ guinées; donc $60-x$, ou la dette de $B=36$; & $80-x$, ou la dette de *C*, $=56$.

PROBLEME 18.

43. *On demande à quelqu'un combien il lui reste de dents, & il répond, trois fois autant que j'en ai perdues: on lui demande ensuite combien il en a perdues, & sa réponse est le nombre de celles que j'ai perdues, multiplié par* $\frac{1}{6}$ *du nombre qui me reste, est égal au nombre de toutes celles que j'ai eues auparavant: on demande combien de dents il a perdues, & combien il lui en reste encore.*

Rép. Il en a perdu 8, & il lui en reste 24: car le nombre 24 est égal à trois fois 8; & de plus 8, qui est le nombre des dents qu'il a perdues, multipliés par 4, c'est-à-dire, par $\frac{1}{6}$ de 24, qui est le nombre des dents qui lui restent, $=32=24+8$, c'est-à-dire, au nombre total des dents qu'il avoit eues auparavant.

SOLUTION.

Dents perdues, x.
Celles qui restent, $3x$.
En tout, $4x$.

$\frac{1}{6}$ de celles qui restent $\frac{3x}{6}$, ou $\frac{x}{2}$; ce nombre multiplié par celui des dents perdues, est $\frac{x}{2}\times x$ ou $\frac{xx}{2}$; mais suivant le problême, ce produit est égal au nombre de toutes les dents qu'il avoit eues auparavant; donc $\frac{xx}{2}=4x$; & $xx=8x$; & x, nombre des dents perdues $=8$; donc $3x$, nombre des dents qui restent, $=24$.

PROBLEME 19.

44. *Quelqu'un afferme 25 arpens de terre à 7 livres st. & 12 schellings par an; mais comme ces arpens de terre ne sont pas tous également bons, il donne 8 schellings par an pour chaque arpent des meilleurs, & seulement 5 pour chacun des autres: je demande le nombre des arpens de chaque sorte.*

Rép. Il avoit 9 arpens de la meilleure sorte, & 16 arpens de la plus mauvaise; car $9+16$ arpens $=25$ arpens; & 9 fois 8 schellings $=72$ schellings; & 16 fois 5 schellings $=80$ schellings; & $72+80=152$ schellings $=7$ livres st. & 12 schellings.

SOLUTION.

Mettez x pour le nombre des arpens de la meilleure sorte; en ce cas $25-x$ seront le nombre d'arpens de la plus mauvaise sorte, les deux nombres, ajoûtés ensemble, étant égaux à 25 arpens: de plus, puisqu'il paye 8 schellings par arpent pour la meilleure sorte, il faut qu'il donne huit fois autant de schellings qu'il a de ces arpens, c'est-à-dire, $8x$; & puisqu'il paye cinq schellings pour chaque arpent de la mauvaise sorte, il faut pareillement qu'il donne cinq fois autant de schellings qu'il a de ces arpens, c'est-à-dire, $\overline{25-x}\times 5$, ou $125-5x$: ajoûtez ces deux sommes ensemble, & elles monteront à $8x+125-5x$, ou $3x+125$ en schellings; mais la somme est 152 schellings par la supposition; donc $3x+125=152$; donc $3x=152-125=27$; donc x, nombre d'arpens de la meilleure sorte $=9$, & $25-x$, nombre d'arpens de la plus mauvaise sorte $=16$.

PROBLEME 20.

45. *Quelqu'un engage un Jardinier pour 36 jours aux conditions suivantes, savoir, que pour chaque jour qu'il travaillera, il aura deux schellings & six sous; & que pour chaque jour qu'il ne viendra point travailler, on lui rabattra un schelling & six sous: or au bout de 36 jours, tout rabais fait, le Jardinier reçoit deux livres st. & dix-huit schellings: je demande combien de jours il a travaillé.*

Rép. Il a travaillé 28 jours, & en a été 8 sans rien faire: car 28 demi écus (monnoye d'Angleterre) montent à 3 livres st. 10 schellings, qui lui revenoient comme son salaire; mais de cette somme il faut rabattre huit fois 18 sous, c'est-à-dire, 12 schellings, suivant l'accord: or cette derniére somme retranchée de la premiére, laisse 2 livres st. & 18 schellings.

SOLUTION.

Appellez x le nombre des jours qu'il a travaillé; cela étant, le nombre des jours qu'il a été absent sera marqué par $36-x$; de plus, puisqu'il devoit recevoir 30 sous pour chaque jour qu'il travailleroit, le nombre des sous qui lui sont dus comme gages, seront $30\times x$, ou $30x$; & puisqu'il devoit payer lui-même 18 sous pour chaque jour qu'il seroit absent, le nombre des sous qu'il doit, comme amendes, sera $18\times\overline{36-x}$, ou $648-18x$: retranchez à-présent $648-18x$ de $30x$, c'est-à-dire, ce qu'il doit de ce qui lui est dû; ou, ce qui revient au même, ajoûtez $18x-648$ à $30x$, & vous aurez $48x-648$, pour exprimer le nombre de sous

ſous qu'il doit recevoir; mais il reçoit 2 livres ſt. & 18 ſchellings, ou 696 ſous, par l'hypothéſe; donc $48x - 648 = 696$; donc $48x = 648 + 696 = 1344$; donc x, nombre des jours qu'il a travaillé $= 28$; & $36 - x$, nombre des jours qu'il n'eſt point venu travailler $= 8$.

PROBLEME 21.

46. *Suppoſons que 19 livres d'or péſent 18 livres dans l'eau; & de plus, que 10 livres d'argent péſent 9 livres dans l'eau; enfin, ſuppoſons qu'une maſſe du poids de 106 livres & qui eſt un mélange d'or & d'argent, ne péſe dans l'eau que 99 livres, je demande les quantités diſtinctes d'or & d'argent dont cette maſſe eſt compoſée.*

Rép. Il y a dans la maſſe 76 livres d'or, & 30 livres d'argent; car $76 + 30 = 106$; de plus, ſi 19 livres d'or péſent 18 livres dans l'eau, 76 livres d'or péſeront 72 livres dans l'eau, par la règle de trois; & ſi 10 livres d'argent péſent 9 livres dans l'eau, 30 livres d'argent péſeront dans l'eau 27 livres, par la même régle; & enfin $72 + 27$, poids de la maſſe totale dans l'eau $= 99$, comme l'exige le problême.

SOLUTION.

Nommez x le nombre des livres d'or qu'il y a dans la maſſe; cela étant le nombre $106 - x$ déſignera combien il s'y trouve de livres d'argent; & pour trouver le poids de l'or dans l'eau, je dis, ſi 19 livres d'or péſent 18 livres dans l'eau, que péſera x? la réponſe eſt $\frac{18x}{19}$: de plus, pour trouver le poids de l'argent dans l'eau, je dis, ſi 10 livres d'argent péſent 9 livres dans l'eau, quel ſera le poids de $106 - x$? & la réponſe eſt $\frac{954 - 9x}{10}$; j'ajoûte enſemble ces deux poids, & leur ſomme eſt $\frac{18x}{19} + \frac{954 - 9x}{10}$; mais ſuivant le problême, le poids de toute la maſſe dans l'eau eſt de 99 livres; ainſi l'équation eſt $\frac{18x}{19} + \frac{954 - 9x}{10} = 99$; donc $18x + \frac{18126 - 171x}{10} = 1881$; donc $180x + 18126 - 171x = 18810$, c'eſt-à-dire, $9x + 18126 = 18810$; donc $9x = 18810 - 18126 = 684$; donc x, nombre des livres d'or dans la maſſe $= 76$; & $106 - x$, nombre des livres d'argent $= 30$.

NB. Nous avons ſuppoſé ici comme une choſe accordée, que tous les corps de la même gravité ſpécifique, péſent dans l'eau proportionellement à leurs peſanteurs dans l'air, ce qui eſt facile à démontrer par l'Hydroſtatique, dont pluſieurs expériences ne laiſſent aucun doute ſur ce ſujet:

jet: par exemple, si le poids d'une certaine quantité d'or pesée dans l'air est à son poids, si l'on pése cette même quantité dans l'eau, comme 19 à 18, le poids d'une quantité quelconque d'or pesée dans l'air, sera à son poids, si l'on pése cette même quantité dans l'eau, comme 19 à 18; & la même observation est applicable à l'argent, avec cette différence seulement, que comme la gravité spécifique de l'argent est moindre que celle de l'or, la proportion dont il s'agit, sera autre, étant comme 10 à 9, & quelquefois comme 11 à 10.

PROBLEME 22.

47. *Un Rentier place une certaine somme d'argent à 6 pour 100 d'intérêt simple: cet intérêt au bout de dix ans se trouve égaler le capital à 12 livres près. On demande quelle somme a été placée à intérêt.*

Rép. La somme étoit de 30 livres, & l'intérêt de $18 = 30 - 12$: car comme une somme de 100 livres est à son intérêt annuel de 6 livres, ainsi un capital de 30 livres est à son intérêt annuel 1. 8 de livre; & par conséquent l'intérêt montera à 18 livres au bout de 10 ans.

SOLUTION.

Appellez le nombre de livres, qui forme cette somme, x; cela étant, vous trouverez l'intérêt pour un an en disant, si 100 livres de capital donnent 6 livres d'intérêt, que donnera le capital x? & la réponse sera $\frac{6x}{100}$; ce sera-là l'intérêt de x pour un an, & par cela même l'intérêt pour dix ans sera $\frac{60x}{100}$, ou $\frac{6x}{10}$ ou $\frac{3x}{5}$: mais suivant le problême, cet intérêt doit être $x - 12$; car il manque 12 livres pour que les intérêts échus au bout de dix ans égalent le capital, par la supposition; donc $x - 12 = \frac{3x}{5}$; donc $5x - 60 = 3x$; donc $5x - 3x - 60 = 0$, c'est-à-dire $2x - 60 = 0$; donc $2x = 60$, & $x = 30$, & $\frac{3x}{5}$; c'est-à-dire, l'intérêt de 10 ans $= 18$ livres.

PROBLEME 23.

48. *Un Rentier place 98 livres st. une partie à 5 pour 100, & l'autre partie à 6 pour 100 d'intérêt simple; & tout l'intérêt au bout de quinze ans monte à 81 livres. Quelles sont les deux parties.*

Rép. La partie à 5 pour 100 étoit de 48 livres, & l'autre à 6 pour 100 de 50 livres: car en premier lieu, $48 + 50 = 98$; & de plus, l'intérêt

an-

annuel de 48 livres ſt. à 5 pour 100 monte à 2 livres 8 ſchellings; & l'intérêt annuel de 50 livres à 6 pour 100 eſt de 3 livres; donc l'intérêt total monte à 5 livres 8 ſchellings par an; & par conſéquent à 81 livres en 15 ans.

SOLUTION.

Appellez x la partie placée à 5 pour 100; donc l'autre partie placée à 6 pour 100 ſera $98-x$; pour trouver l'intérêt annuel de x dites, ſi 100 livres de capital donnent 5 livres d'intérêt, que donnera x? & la réponſe ſera $\frac{5x}{100}$: enſuite, par rapport à l'autre partie dites, ſi 100 de capital donnent 6 pour 100 d'intérêt, que donneront $98-x$? & la réponſe ſera $\frac{588-6x}{100}$: ajoûtez enſemble ces deux intérêts, ſavoir $\frac{5x}{100}$ & $\frac{588-6x}{100}$, & la ſomme totale ſera $\frac{5x+588-6x}{100}$, c'eſt-à-dire $\frac{588-x}{100}$; c'eſt-là l'intérêt que les deux parties donnent dans l'eſpace d'un an; ainſi en 15 ans cet intérêt monte à $\frac{8820-15x}{100}$; mais il monte à 81 livres, par la ſuppoſition; donc $\frac{8820-15x}{100}=81$; donc $8820-15x=8100$; donc $8820=15x+8100$; donc $15x=8820-8100=720$; donc x, c'eſt-à-dire la partie placée à 5 pour $100=48$ livres; & $98-x$, qui eſt la partie placée à 6 pour 100 $=50$ livres, comme il a été dit.

PROBLEME 24.

49. *Quelqu'un engage un domeſtique pour un an, ou 12 mois, & lui promet 6 livres ſt. en argent, avec un habit de livrée, dont ils fixent enſemble la valeur: mais au bout de ſept mois, le maître mécontent du domeſtique le congédie en lui laiſſant ſon habit, & lui donne outre cela 50 ſchellings en argent; ce qui étoit tout ce qui pouvoit lui revenir pour le tems de ſon ſervice: je demande la valeur de l'habit.*

Rép. La valeur de l'habit étoit de 48 ſchellings: car en ce cas la ſomme totale de ſes gages pour 12 mois auroit été de 168 ſchellings; & par la règle de trois, ſes gages pour 7 mois ſeroient 98 ſchellings, d'où retranchant 48 ſchellings pour la valeur de l'habit, il reſte la ſomme de 50 ſchellings, qui lui eſt payée en argent.

SOLUTION.

Mettez x pour la valeur de l'habit exprimée en ſchellings; cela étant, tous ſes gages pour 12 mois ſeront $x+120$; & ſes gages pour 7 mois

pourront se trouver par la règle de trois, en disant, comme 12 est à 7, ainsi $x+120$ est à $\frac{7x+840}{12}$; mais suivant le problême, ses gages pour 7 mois ont été l'habit & 50 schellings en argent, c'est-à-dire $x+50$; donc $x+50=\frac{7x+840}{12}$; donc $12x+600=7x+840$; donc $12x-7x+600=840$; c'est-à-dire, $5x+600=840$; donc $5x=840-600=240$; donc x, valeur de l'habit exprimée en schellings, est 48.

PROBLÊME 25.

50. *Quelqu'un distribue 20 schellings à 20 mendians, donnant 6 sous par tête aux uns, & 16 sous par tête aux autres: je demande le nombre des uns & des autres.*

Rép. Il y a eu 8 mendians, qui ont reçu chacun 6 sous, & 12 qui en ont reçu chacun 16: car premiérement, $8+12=20$ mendians; & puisque huit fois 6 sous valent 4 schellings, & douze fois 16 sous, 16 schellings, nous aurons en second lieu, $4+16=20$ schellings.

SOLUTION.

Soit le nombre des mendians qui ont reçu 6 sous par tête nommé x; cela étant puisqu'il y a eu 20 mendians en tout, on pourra désigner le nombre de ceux qui ont reçu chacun seize sous par $20-x$: le nombre de sous reçu par les premiers, sera $6x$, & le nombre de sous qui a été reçu par les autres, sera $\overline{20-x}\times 16$, c'est-à-dire, $320-16x$; & par conséquent le nombre total de sous reçus $=6x+320-16x$, ou $320-10x$; mais suivant le problême, il y a eu en tout de donné 20 schellings, ou 240 sous; donc $320-10x=240$; donc $10x+240=320$; donc $10x=320-240=80$; par conséquent x, nombre de ceux qui ont reçu six sous par tête, est 8, & $20-x$, nombre de ceux qui ont reçu chacun 16 sous, $=12$.

PROBLEME 26.

51. *On demande de changer 24 schellings en 24 piéces, dont les unes soient des piéces de neuf sous, & les autres des piéces de treize sous & demi.*

Rép. Il doit y avoir 8 piéces de neuf sous, & 16 piéces de treize sous & demi: car premiérement $8+16$ font 24 piéces; & puisque 8 piéces de neuf sous sont équivalentes à 6 schellings, & 16 piéces de treize sous & demi à 18 schellings, nous aurons, en second lieu, $6+18=24$ schellings.

SOLUTION.

Soit x le nombre des piéces de neuf sous, & par conséquent $24-x$ celui des piéces de treize sous & demi: or le nombre des demi-sous équi-

va-

valent au premier eſt $18x$, à cauſe qu'il y a 18 demi-ſous dans chaque piéce de 9 ſous; & le nombre des demi-ſous équivalent à l'autre eſt $\overline{24-x} \times 27$, ou $648-27x$, à cauſe qu'il y a 27 demi-ſous dans chaque piéce de treize ſous & demi; donc le nombre de demi-ſous équivalent à la ſomme totale ſera $18x+648-27x$, c'eſt-à-dire, $648-9x$; mais ſuivant le problême, le tout monte à 24 ſchellings, ou 576 demi-ſous; donc $648-9x=576$; donc $9x+576=648$; donc $9x=648-576=72$; donc x, nombre des piéces de neuf ſous eſt 8; & $24-x$, nombre des piéces de treize ſous & demi $=16$.

PROBLEME 27.

52. *Deux voyageurs*, A *&* B, *ſe mettent en chemin*, A *avec* 100 *livres*, *&* B *avec* 48: *ils rencontrent une troupe de voleurs*, *qui prennent à* A *le double de ce qu'ils prennent à* B, *& qui laiſſent à* A *le triple de ce qu'ils laiſſent à* B, *je demande combien ils ont pris à chacun d'eux.*

Rép. Ils ont pris 44 livres à *B*, & le double, c'eſt-à-dire, 88 livres à *A*: ainſi il reſte à *B* 4 livres & à *A* $12=3\times4$.

SOLUTION.

Nombre de livres pris à B, x.
à A, $2x$.
Laiſſé à B, $48-x$.
Laiſſé à A, $100-2x$.

Mais ſuivant le problême, ils ont laiſſé à *A* le triple de ce qu'ils ont laiſſé à *B*, c'eſt-à-dire, trois fois $48-x$, ou $144-3x$; donc $100-2x=144-3x$; donc $100-2x+3x=144$, c'eſt-à-dire, $100+x=144$; donc x, qui eſt la ſomme priſe à $B=144-100=44$; & $2x$, ou la ſomme priſe à A, $=88$.

PROBLEME 28.

53. *Une citerne qui ſeroit remplie en* 12 *minutes de tems par deux tuyaux qui s'y déchargeroient*, *le ſeroit en* 20 *minutes par un ſeul de ces tuyaux*: *je demande en combien de tems elle le ſeroit par l'autre tuyau ſeul.*

Rép. En 30 minutes: car à ce compte, le tuyau rendroit dans l'eſpace d'une minute $\frac{1}{30}$ de la quantité d'eau requiſe pour remplir la citerne, & $\frac{12}{30}$ ou $\frac{2}{5}$ en 12 minutes: mais l'autre tuyau rend en 12 minutes $\frac{12}{20}$ ou $\frac{3}{5}$ de la même quantité d'eau par la ſuppoſition; donc les deux tuyaux donneront en 12 minutes $\frac{5}{5}$, c'eſt-à-dire, de quoi remplir la citerne.

SOLUTION.

Désignez par x le tems qu'il faudroit au second tuyau pour remplir la citerne; puis pour trouver quelle partie de la citerne seroit remplie par ce tuyau en 12 minutes, dites, si dans le tems x le tuyau remplit la citerne entiére, en 12 minutes quelle partie en remplira-t-il? & la réponse sera $\frac{12}{x}$; & par la même raison $\frac{12}{20}$ sera la partie remplie par le premier tuyau en 12 minutes, & $\frac{12}{x} + \frac{12}{20}$ exprimeront ensemble la quantité d'eau que les deux tuyaux rendront dans ce même tems; mais suivant le problême, ils devoient fournir ensemble de quoi remplir la citerne durant ce tems; donc $\frac{12}{x} + \frac{12}{20} = 1$; donc $12 + \frac{12x}{20} = x$; donc $240 + 12x = 20x$; donc $20x - 12x$, ou $8x = 240$; & x, tems requis pour que le second tuyau remplisse seul la citerne, est $= 30$ minutes, comme nous l'avons dit.

PROBLEME 29.

54. *Un Général disposant son armée en rangs & files, & en forme de quarré, trouva qu'il avoit 60 hommes de plus que n'en exigeoit la figure; mais ayant voulu aggrandir le côté de son quarré d'un seul homme, il s'apperçut qu'il lui en manquoit pour cet effet 41; je demande le nombre de ses soldats, & combien il y en avoit de chaque côté.*

Rép. Son armée étoit de 2560 hommes, & il y en avoit 50 pour former un des côtés: on comprendra mieux ceci, si l'on considére, que des soldats sont disposés en rangs & files, quand le rang le plus avancé a derriére lui un autre rang, & celui-ci à son tour un autre, & ainsi de suite: s'il y avoit par exemple 6 rangs, & 7 hommes dans chaque rang, on diroit qu'il y en a 7 en rang, & 6 en file, & le nombre d'hommes ainsi disposés seroient 6 fois 7, ou 42. Cela étant, supposons que le Général eût 50 rangs avec 50 hommes dans chaque rang; en ce cas son armée auroit formé un quarré ayant 50 pour côté, & le nombre d'hommes ainsi disposés auroit été 50 fois 50, ou 2500; donc si nous supposons qu'il a en tout 2560 hommes, il doit avoir eu 60 hommes de plus que n'en demandoit la figure: supposons donc le côté de son quarré aggrandi de 1; il est manifeste alors que 51 fois 51 auroient formé le nouveau quarré $= 2601$: mais le Général n'avoit que 2560 hommes; donc ce quarré exigeoit 41 hommes plus qu'il n'avoit; car 2560 étant soustraits de 2601, il reste 41.

SOLUTION.

Nommez x le nombre d'hommes qui formoit le côté du quarré : cela étant $x \times x$ ou xx fera le nombre total qui formoit le quarré ; mais suivant le problême, il restoit alors 60 hommes ; donc $xx + 60$ désigne l'armée entiére : supposons présentement que le côté du quarré soit $x + 1$; cela étant $\overline{x+1} \times \overline{x+1}$, ou $xx + 2x + 1$, fera le nombre d'hommes requis pour former cette figure ; mais suivant le problême, ce dernier nombre $xx + 2x + 1$ doit surpasser de 41 le vrai nombre d'hommes $xx + 60$; donc $xx + 60$ étant soustraits de $xx + 2x + 1$, il doit rester 41 ; si l'on soustrait $xx + 60$ de $xx + 2x + 1$, il reste $+ 2x - 59$; donc $2x - 59 = 41$; donc $2x = 41 + 59 = 100$; donc x, qui est le nombre qui forme un des côtés du quarré $= 50$; & $xx + 60$, c'est-à-dire, le nombre total de l'armée $= 2560$, comme nous l'avons dit.

$$\begin{array}{r} x + 1 \\ \underline{x + 1} \\ xx + x + 1 \\ \underline{+ x \quad\;\;} \\ xx + 2x + 1. \end{array} \qquad \begin{array}{r} xx + 2x + 1 \\ \underline{xx \quad * + 60} \\ * + 2x - 59. \end{array}$$

PROBLEME. 30.

55. *Il y a deux villes éloignées l'une de l'autre de 154 milles, d'où partent dans le même tems deux hommes dans le dessein de se rencontrer, l'un d'eux faisant 3 milles en 2 heures, & l'autre 5 milles en 4 heures : je demande le tems qui s'étoit écoulé, & le chemin qu'ils avoient fait, quand ils se sont rencontrés.*

Rép. Comme la supposition porte que nos voyageurs sont partis dans le même tems, & que c'est aussi dans le même tems qu'ils doivent s'être rencontrés, je dis que leur rencontre s'est faite au bout de 56 heures : car si en 2 heures le premier a fait 3 milles, en 56 heures il doit en avoir fait 84, par la règle de trois ; pareillement, si en 4 heures le second fait 5 milles, en 56 heures il doit faire 70 milles ; & $84 + 70 = 154$ milles ; c'est-à-dire, à la distance totale.

SOLUTION.

Soit x le nombre d'heures que chacun d'eux a été en chemin : pour trouver combien de milles le premier a faits, dites, si en 2 heures il a fait 3 milles, combien en a-t-il faits dans le nombre x d'heures ? & la réponse est $\frac{3x}{2}$: dites de-même par rapport au second, si en 4 heures il a fait 5 milles, combien en a-t-il faits dans le nombre x d'heures ? & la réponse est $\frac{5x}{4}$; donc les deux chemins qu'ils ont parcourus, ajoûtés ensemble,

font $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{4}$; mais le chemin total étoit de 154 milles; donc $\frac{3x}{2}+\frac{5x}{4}=154$; donc $3x+\frac{10x}{4}=308$; donc $12x+10x$, c'est-à-dire, $22x=1232$; donc x, qui désigne le nombre d'heures qu'ils ont été en chemin, $=56$; donc $\frac{3x}{2}$, nombre des milles que le premier a faits, $=84$, & $\frac{5x}{4}$, nombre des milles que le second a faits, $=70$, comme nous l'avons dit.

PROBLEME 31.

56. *Quelqu'un part d'un endroit, & avance à raison de 7 milles en 5 heures; & 8 heures après un autre part du même endroit, & parcourt le même chemin à raison de 5 milles en 3 heures: je demande combien de tems & jusqu'où le premier doit avoir marché avant que d'être joint par le second.*

Rép. Il doit marcher durant 50 heures, & faire par conséquent 70 milles; le second doit marcher durant 50 heures $-$ 8, ou 42 heures, & par conséquent faire aussi 70 milles; puis donc qu'ils sont partis du même endroit, & que le second voyageur a fait autant de chemin que le premier, il faut nécessairement qu'il l'ait joint.

SOLUTION.

Soit x le nombre d'heures que le premier a été en voyage, & par conséquent $x-8$ le nombre d'heures que le second a marché avant de joindre le premier: cela étant, pour déterminer le nombre de milles que le premier a faits, dites, si en 5 heures il fait 7 milles, combien en fera-t-il dans le nombre x d'heures? & la réponse est $\frac{7x}{5}$; puis dites par rapport à l'autre, si en 3 heures il fait 5 milles, combien en fera-t-il dans le nombre d'heures $x-8$, & la réponse est $\frac{5x-40}{3}$; mais comme les deux voyageurs partent du même endroit, & doivent aussi arriver à la fois au même endroit, il s'ensuit qu'ils parcourent la même étendue d'espace; donc $\frac{5x-40}{3}=\frac{7x}{5}$; donc $5x-40=\frac{21x}{5}$; donc $25x-200=21x$; donc $25x-21x-200=0$, c'est-à-dire, $4x-200=0$; donc $4x=200$; & x c'est-à-dire le nombre d'heures que le premier a marché, $=50$; donc $x-8$, ou le nombre d'heures que le second a marché $=42$; $\frac{7x}{5}$, qui désigne les milles que le premier a faits $=70$; & $\frac{5x-40}{3}$; c'est-à-dire les milles que le second a faits $=70$, comme il a été dit.

PRO-

PROBLEME 32.

57. *Quelqu'un regarde à une montre, & interrogé quelle heure il est, répond, entre 5 & 6; mais comme on vouloit de lui une réponse plus précise, il dit, que dans cet instant l'aiguille des minutes & celle des heures indiquoient le même point: on demande quel tems du jour il étoit alors.*

Rép. Précisément 5 heures $+ \frac{5}{11}$ d'une heure, ou 27 minutes & environ 16 secondes au-delà de 5 heures.

Pour que le Lecteur se forme une idée plus distincte de cette réponse, & de la solution suivante, appellons *A* le point de la platine où les deux aiguilles se trouvent au même instant entre 5 & 6 heures; cela étant, puisque l'aiguille qui marque les heures, se meut depuis 12 jusqu'à 5 en 5 heures, si le tems de $\frac{5}{11}$ d'une heure a été bien assigné, l'aiguille des heures doit se mouvoir depuis 12 jusqu'au point *A*, en 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure: de plus, à 5 heures précises l'aiguille des minutes marquoit 12, & suivant ce calcul, $\frac{5}{11}$ d'une heure après elle se trouvoit au point *A*; donc l'aiguille des minutes a avancé depuis 12 jusqu'à *A* en $\frac{5}{11}$ d'une heure; le cas étant ainsi posé, savoir, que l'aiguille des heures se meut depuis 12 jusqu'à *A* en 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure, & que l'aiguille des minutes parcourt le même espace en $\frac{5}{11}$ d'une heure, voyons présentement comment ces tems s'accordent avec les vitesses connues des deux aiguilles; car celle des minutes fait sa révolution dans l'espace d'une heure, au-lieu que celle des heures met 12 heures à faire son tour; ainsi l'aiguille des heures se meut douze fois plus lentement que celle des minutes; mais suivant notre calcul, l'aiguille des heures a passé depuis 12 jusqu'à A en 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure, & l'aiguille des minutes a parcouru le même espace en $\frac{5}{11}$ d'une heure; donc si le tems demandé a été bien assigné, 5 heures & $\frac{5}{11}$ d'une heure doivent être 12 fois autant que $\frac{5}{11}$ d'une heure; & la chose se trouve être ainsi; car 12 fois $\frac{5}{11} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$.

SOLUTION.

Désignez par x la partie ou les parties d'une heure depuis 5 heures jusqu'à l'instant demandé; il faut donc que l'aiguille des heures ait avancé depuis 12 jusqu'en *A*, en $x + 5$ heures, & l'aiguille des minutes a parcouru le même espace dans le tems x; & $x + 5$ fera à x comme 12 à 1; multipliez l'un par l'autre les termes extrêmes & les termes moyens de cette derniére proportion, suivant l'Art. 15. & vous aurez $12x = x + 5$ heures; & $12x - x$, c'est-à-dire $11x = 5$ heures; & $x = \frac{5}{11}$ d'une heure.*

PRO-

* Si les aiguilles avoient répondu au même point entre 6 & 7 heures; x auroit été $\frac{6}{11}$: en gé-

PROBLEME 33.

58. *Une montre a deux aiguilles qui tournent ſur le même centre; celle qui va le plus vite, fait ſa révolution en 12 heures, & celle, dont le mouvement eſt le plus lent, fait la ſienne en 16 heures: on demande quand ces deux aiguilles indiqueront le même point.*

Rép. Au bout de 48 heures.

Pour faciliter le calcul, ſuppoſons que les deux aiguilles partent du même point; il eſt clair alors que celle qui ſe meut avec le plus de viteſſe devancera d'abord l'autre, qui ſe meut plus lentement, & aura gagné un quart de cercle, un demi-cercle, trois quarts de cercle, & à la fin un cercle entier ſur l'autre, auquel cas elles ſe retrouveront pour la première fois enſemble; depuis qu'elles ſont parties enſemble du même point. Il s'agit donc proprement de déterminer le tems que l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, doit employer pour gagner une révolution ſur l'aiguille, qui ſe meut le plus lentement: puis donc qu'en 48 heures l'aiguille, qui ſe meut le plus lentement, fait 3 révolutions, & que l'autre aiguille en fait 4, il s'enſuit que le période demandé eſt de 48 heures.

SOLUTION.

Soit x le nombre des heures qu'on demande, pour trouver enſuite le nombre des révolutions que l'aiguille, dont le mouvement eſt le plus lent, fait dans le tems x, dites, ſi en 16 heures cette aiguille achéve une révolution, combien en achévera-t-elle dans le tems x? & la réponſe ſera $\frac{x}{16}$; puis à l'égard de l'aiguille qui ſe meut avec le plus de viteſſe, dites, ſi en 12 heures elle fait une révolution, combien en fera-t-elle dans le tems x? & la réponſe ſera $\frac{x}{12}$; donc $\frac{x}{16}$ eſt le nombre des révolutions de l'aiguille dont le mouvement eſt le plus lent, & $\frac{x}{12}$ le nombre des révolutions que l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, a faites dans le même tems x: or pour ſavoir combien l'aiguille, qui ſe meut avec le plus de viteſſe, a gagné ſur l'autre, je ſouſtrais $\frac{x}{16}$ de $\frac{x}{12}$, & le reſte eſt $\frac{x}{12} - \frac{x}{16}$; ou $\frac{x}{48}$; mais comme x eſt le tems où les deux aiguilles doivent ſe retrouver au même point, il eſt manifeſte par ce qui a été dit,

général, l'heure au delà de laquelle les aiguilles ſe trouvent, doit ſervir de numérateur à la fraction, & le nombre 11 en être le dénominateur: quand les deux aiguilles marquent 12, x eſt $= \frac{11}{11}$ d'une heure, comme nous l'avons dit.

dit, que l'aiguille, qui se meut avec le plus de vitesse, a gagné une révolution entiére sur celle qui se meut le plus lentement; donc $\frac{x}{48}=1$, & $x=48$, comme nous l'avons dit.

PROBLEME 34.

59. *Un Cabaretier a deux sortes de vins, dont l'un vaut 20 sous le pot, & l'autre 12 sous: il voudroit en mêlant ces deux vins faire 100 pots, à 14 sous le pot: la question est combien il doit prendre de pots de chaque sorte.*

Rép. Il doit y avoir 25 pots de la meilleure sorte, & 75, c'est-à-dire, $100-25$ de la plus mauvaise: car 25 pots à 20 sous le pot font 500 sous; & 75 pots à 12 sous le pot font 900 sous; donc la somme totale monte à 1400 sous; laquelle divisée par 100, nombre des pots, donne pour quotient 14.

SOLUTION.

Appellez x le nombre des pots de la meilleure sorte, & par conséquent le nombre des autres pots $100-x$; cela étant, la grandeur $20x$ exprimera en sous le prix de la meilleure sorte, $1200-12x$ celui de la plus mauvaise, & $8x+1200$ celui du tout: mais 100 pots à 14 sous le pot montent à 1400 sous; donc $8x+1200=1400$; $8x=200$; & x, nombre des pots de la meilleure sorte$=25$; & $100-x$, nombre des pots de la plus mauvaise sorte$=75$.

PROBLEME 35.

60. *On demande de partager 90 en 4 parties telles, que la première étant augmentée de 2, la seconde diminuée de 2, la troisiéme multipliée par 2, & la quatriéme divisée par 2, elles soient toutes égales entre elles.*

Rép. Les parties sont 18, 22, 10 & 40: car $18+22+10+40=90$; & $18+2=22-2=10\times2=\frac{40}{2}=20$.

SOLUTION.

1°. Designez la première partie par x; cela étant, si cette premiére partie est augmentée de 2, la somme sera $x+2$; donc la seconde partie diminuée de 2, la troisiéme multipliée par 2, & la quatriéme divisée par 2, doivent toutes être égales à $x+2$.

2°. Mais si la seconde partie, après être diminuée de 2 se trouve$=x+2$, elle doit avant cette diminution, avoir été$=x+4$.

3°. Si la troisiéme partie étant doublée ou multipliée par 2 est $x+2$,

elle

elle doit avant la multiplication avoir été la moitié de $x+2$, c'est-à-dire, $\frac{x}{2}+1$.

Enfin, si la moitié du quatriéme nombre est $x+2$, ce quatriéme nombre lui-même sera $2x+4$; de sorte enfin que les parties se trouvent être x, $x+4$, $\frac{x}{2}+1$, & $2x+4$; ajoûtez ces parties ensemble, & la somme sera $4x+\frac{x}{2}+9$; ce qui nous donne cette équation $4x+\frac{x}{2}+9=90$; donc $8x+x+18=180$; donc $9x=162$; & x, la premiére partie $=18$, donc $x+4$, la seconde partie $=22$; & $\frac{x}{2}+1$, la troisiéme partie $=10$; & $2x+4$, la quatriéme partie $=40$.

Probleme 36.

61. *Un Berger menant paître ses brebis en tems de guerre, rencontre une compagnie de soldats, qui lui enlévent la moitié de son troupeau + la moitié d'une brebis; il éprouve le même traitement de la part d'une seconde compagnie de soldats, puis d'une troisiéme, & enfin d'une quatriéme, chacune d'elles lui enlevant la moitié de ce qui lui restoit + la moitié d'une brebis; de sorte qu'à la fin il ne lui reste que 7 brebis: je demande combien il en avoit d'abord.*

Rép. Son troupeau avoit consisté en 127 brebis; & si la premiére compagnie lui avoit enlevé la moitié de son troupeau, elle lui auroit laissé $63\frac{1}{2}$ brebis; mais en lui prenant une $\frac{1}{2}$ brebis de plus, elle ne lui en laissa que 63; de-même, la seconde compagnie lui en laissa 31, la troisiéme 15, & la quatriéme 7.

N. B. Avant de donner la solution de ce Problême, je dois rappeller au Lecteur ce qui a été dit ci-dessus (Introd. Art. 13.) savoir, qu'on peut prendre la moitié d'une fraction de deux maniéres, en prenant la moitié du numérateur, ou en doublant le dénominateur.

Solution.

Désignez par x le nombre des brebis qu'il avoit d'abord. Si la premiére compagnie avoit seulement pris la moitié du troupeau, elle lui auroit laissé l'autre moitié, savoir $\frac{x}{2}$; mais elle prit la moitié $+\frac{1}{2}$ brebis; donc il ne garda que $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ ou $\frac{x-1}{2}$; si la seconde compagnie avoit seulement pris la moitié de ce qui lui restoit, elle lui auroit laissé la moitié, savoir $\frac{x-1}{4}$; mais en lui prenant $\frac{1}{2}$ brebis de plus, elle ne lui laissa que $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{2}$, c'est-

c'est-à-dire, $\frac{2x-2-4}{8}$, ou $\frac{2x-6}{8}$, ou $\frac{x-3}{4}$; pareillement la troisiéme compagnie lui laissa $\frac{x-3}{8}-\frac{1}{2}$, ou $\frac{2x-6-8}{16}$, ou $\frac{2x-14}{16}$, ou $\frac{x-7}{8}$; & la quatriéme compagnie lui laissa $\frac{x-7}{16}-\frac{1}{2}$, ou $\frac{x-15}{16}$; mais elle ne lui laissa que 7 brebis, par la supposition; donc $\frac{x-15}{16}=7$, & $x-15=112$; & $x=127$.

PROBLEME 37.

62. *Quelqu'un achette un certain nombre d'œufs, dont il paye la moitié à raison de 2 pour un sou, & l'autre moitié à raison de 3 pour un sou; il vend ensuite ses œufs à raison de 5 pour deux sous, &, contre son attente, trouve qu'il perd un sou à ce marché: quel étoit le nombre de ses œufs?*

Rép. Ce nombre étoit 60; la moitié à raison de 2 pour un sou lui coutoit 15 sous, & l'autre moitié à raison de 3 pour un sou, lui coutoit 10 sous; & le tout 25 sous: mais 60 œufs vendus à raison de 5 pour 2 sous, ne lui rendent que 24 sous, comme il paroît par la règle de proportion; donc il a perdu un sou à ce marché.

SOLUTION.

Que le nombre des œufs soit nommé x; & dites, si 2 œufs coutent un sou, que coutera $\frac{x}{2}$, c'est-à-dire la moitié des œufs? & la réponse sera $\frac{x}{4}$; & par le même raisonnement, l'autre moitié, à raison de 3 œufs pour un sou, lui coutera $\frac{x}{6}$: ainsi il doit payer en tout $\frac{x}{4}+\frac{x}{6}$, ou $\frac{5x}{12}$: puis dites, en vendant 5 œufs pour deux sous, pour combien a été vendu le nombre x d'œufs? & la réponse sera $\frac{2x}{5}$; donc le nombre $\frac{2x}{5}$ marque combien de sous il a reçu pour ses œufs; retranchez ce dernier nombre de $\frac{5x}{12}$, c'est-à-dire, du nombre de sous qu'il a payé, & le reste $\frac{5x}{12}-\frac{2x}{5}$, ou $\frac{x}{60}$ exprimera sa perte; mais par la supposition il a perdu un sou; donc $\frac{x}{60}=1$ & x, le nombre d'œufs, sera 60.

PROBLEME 38.

63. *Quelqu'un tire une certaine quantité de vin d'une futaille pleine qui tenoit 81 pots; & ayant ensuite rempli la futaille d'eau, il tire autant de ce mé-*

mêlange, qu'il avoit tiré auparavant de vin pur, & continue à faire la même chose jusqu'à quatre fois; de sorte qu'à la fin il ne reste plus dans la futaille que 16 pots de vin pur, le reste étant de l'eau: je demande combien il a tiré chaque fois.

Rép. Il a tiré chaque fois 27 pots. Comme il y avoit 81 pots de vin dans la futaille, il doit en avoir tiré $\frac{27}{81}$ ou $\frac{1}{3}$ de vin pur: ce qui restoit de vin étoit donc $=54$ pots; la futaille ayant ensuite été remplie d'eau, il a tiré de nouveau $\frac{1}{3}$ du tout, & les 54 pots de vin ont fourni pour cela $\frac{1}{3}$, de sorte qu'il n'est plus resté dans la futaille que $\frac{2}{3}$ de 54 pots, c'est-à-dire, 36 pots; de-même, il est resté $\frac{2}{3}$ de 36, c'est-à-dire 24, après qu'il a tiré 27 pots pour la troisiéme fois; & enfin, après qu'il a tiré pour la quatriéme fois 27 pots, la futaille n'a plus contenu que $\frac{2}{3}$ de 24, c'est-à-dire 16 pots de vin pur, comme l'exige le problême.

SOLUTION.

Comme il y a eu la même quantité de liqueur dans la futaille, savoir 81 pots, (la futaille ayant d'abord été pleine, & ensuite remplie jusqu'à trois fois) & que la même quantité de liqueur en a été tirée chaque fois, il s'ensuit, que la même quantité de liqueur doit s'être trouvée dans la futaille après qu'une partie en a été tirée. Si vous nommez cette derniére quantité x, $\frac{x}{81}$ marquera quelle partie ou quelles parties de toute la liqueur contenue dans la futaille, & par cela même du vin, est restée, après qu'une partie en a été tirée; ainsi la quantité de vin, qu'il y a eu de reste chaque fois, peut être déterminée de la maniére suivante; il y a eu au commencement 81 pots; donc il est resté $81 \times \frac{x}{81}$, ou x, après qu'une partie de la liqueur a été tirée de la futaille pour la premiére fois; $x \times \frac{x}{81}$, ou $\frac{x^2}{81}$ doit être resté après la seconde fois; $\frac{x^2}{81} \times \frac{x}{81}$, ou $\frac{x^3}{6561}$, après la troisiéme fois; & $\frac{x^3}{6561} \times \frac{x}{81}$, ou $\frac{x^4}{531441}$ après la quatriéme; mais suivant le problême, il est resté après la quatriéme fois 16 pots; donc $\frac{x^4}{531441} = 16$; donc $x^4 = 8503056$; donc $x^2 = \sqrt{8503056} = 2916$; donc x, ou le nombre de pots qu'il y a eu chaque fois dans la futaille, après qu'une partie en a été tirée $= \sqrt{2916} = 54$; donc $81 - x$, ou la quantité tirée chaque fois, $= 27$, comme nous l'avons dit.

PRO-

PROBLEME 39.

64. *On demande de partager le nombre de 90 en deux parties telles, que l'une soit à l'autre comme 2 à 3.*

Rép. Les nombres sont 36 & 54: car premiérement, $36+54=90$; & en second lieu, si l'on divise 36 & 54 par 18, les quotiens seront 2 & 3; d'où il suit, que 36 est à 54, comme 2 à 3; car la proportion entre les nombres qu'on divise, reste la même, si la division se fait par le même nombre; & par conséquent si, après cette division commune, les quotiens se trouvent être l'un à l'autre comme 2 à 3, il faut que les dividendes soient entre eux dans la même raison.

SOLUTION.

Désignez la plus petite partie par x, & l'autre par $90-x$; cela étant, x sera à $90-x$ comme 2 à 3, par la supposition; mais par l'Art. 15, toutes les fois qu'il y a quatre quantités proportionelles, le produit des extrêmes sera égal à celui des moyennes: les extrêmes sont ici x & 3, dont le produit est $3x$; & les quantités moyennes sont $\overline{90-x}$ & 2, dont le produit est $180-2x$; donc $3x=180-2x$; donc $5x=180$; & x, la plus petite partie $=36$; & $90-x$, la plus grande $=54$.

PROBLEME 40.

65. *Deux poids, l'un de 5 livres, l'autre de 7, sont suspendus aux bouts d'une verge, qui a 36 pouces de long, je demande quel point de la verge devroit être soutenu pour que les deux poids fussent en équilibre, ou, ce qui revient au même, je demande à quelle distance ce point est, tant de l'un que de l'autre bout de la verge.*

Rép. Le point d'équilibre est à la distance de 15 pouces du grand poids, & par conséquent à la distance de $36-15$, ou 21 pouces du plus petit: car si les poids avoient été égaux, le point d'équilibre se seroit trouvé précisément au milieu de la verge; mais comme un des poids est plus petit que l'autre, le point qu'il s'agit de déterminer, sera proportionellement plus près du grand poids: or 15 est à 21 comme $\frac{15}{3}$ à $\frac{21}{3}$, c'est-à-dire, comme 5 à 7.

SOLUTION.

Nommez x la distance où le point d'équilibre est du plus grand poids, & $36-x$ sa distance du plus petit; cela étant, x sera à $36-x$ comme 5 à 7: en changeant cette analogie en équation, suivant l'Art. 15, nous au-

aurons $7x = 180 - 5x$; donc $12x = 180$; & x, distance où le point d'équilibre est du plus grand poids $= 15$, & $36 - x = 21$.

PROBLEME 41.

66. *On demande un nombre, qui étant ajoûté, d'un côté à 36, & de l'autre à 52, fera que la première somme sera à la dernière, comme 3 à 4.*

Rép. Ce nombre est 12: car $36 + 12$ sont à $52 + 12$, comme 48 à 64, comme $\frac{48}{16}$ à $\frac{64}{16}$, comme 3 à 4.

SOLUTION.

Soit le nombre qu'on demande nommé x, & nous aurons cette proportion, $36 + x$ sont à $52 + x$, comme 3 à 4; donc $144 + 4x = 156 + 3x$; donc $144 + x = 156$; donc x, le nombre cherché, $= 12$.

PROBLEME 42.

67. *Un Relieur me vend deux livres de papier, l'un contenant 48 feuilles pour 3 schellings & 4 sous, & l'autre contenant 75 feuilles pour quatre schellings & 10 sous, tous deux reliés pour le même prix, & tous deux d'une même sorte de papier: je demande combien il compte pour la reliure.*

Rép. Il a compté 8 sous pour la reliure; de sorte que le prix du papier du premier livre étoit 32 sous, & celui du second 50 sous: or si ces prix ont été bien déterminés, il faut qu'ils ayent entre eux la même raison qu'il y a entre les quantités de papier; & c'est ce qui est vrai aussi: car 32 sous sont à 50 sous, comme $\frac{32}{2}$ à $\frac{50}{2}$, c'est-à-dire, comme 16 à 25; & 48 feuilles sont à 75 feuilles comme $\frac{48}{3}$ à $\frac{75}{3}$, c'est-à-dire pareillement, comme 16 à 25.

SOLUTION.

Désignez par x le nombre des sous mis en compte pour la reliure; cela étant nous aurons $40 - x$ pour le prix du papier qu'il y a dans le premier livre, & $58 - x$ pour le prix de celui qu'il y a dans le second; & de plus $40 - x$ à $58 - x$, comme 48 à 75; donc $2784 - 48x = 3000 - 75x$; donc $2784 + 27x = 3000$; donc $27x = 216$; & x, nombre des sous mis en compte pour la reliure $= 8$.

PROBLEME 43.

68. *On demande un nombre, qui étant ajoûté séparément à 15, à 27, & à 45, donne trois nombres en proportion continue.*

N. B.



N. B. Trois nombres ſont en proportion continue quand le premier eſt au ſecond comme le ſecond eſt au troiſiéme.

Rép. Le nombre cherché eſt 9: car $15+9=24$; & $27+9=36$; & $45+9=54$; & 24 ſont à 36, comme $\frac{24}{12}$ à $\frac{36}{12}$, c'eſt-à-dire, comme 2 à 3; & 36 à 54; comme $\frac{36}{18}$ à $\frac{54}{18}$, c'eſt-à-dire auſſi, comme 2 à 3.

SOLUTION.

Appellez le nombre cherché x; cela étant nous aurons cette analogie, $x+15$ eſt à $x+27$, comme $x+27$ eſt à $x+45$; où les deux termes moyens ſont $x+27$ & $x+27$; donc $xx+60x+675=xx+54x+729$; donc $60x+675=54x+729$; donc $6x+675=729$; donc $6x=54$, & x, qui eſt le nombre cherché, $=9$.

PROBLEME 44.

69. *Quelqu'un place un certain nombre de perches en ligne droite, à d'égales diſtances l'une de l'autre, chaque intervalle ne pouvant pas contenir plus de deux perches; mais trouvant que ſa ligne n'iroit qu'à 125 pouces, il l'étend juſqu'à 208 pouces, en rendant chaque intervalle double de ce qu'il étoit auparavant. On demande le nombre des perches.*

Rép. Le nombre des perches étoit 84, & par conſéquent celui des intervalles 83; car ſi deux perches n'admettent qu'un intervalle, trois perches en admettront 2, &c. & 84 perches admettront 83 intervalles, leſquels, s'ils devoient être remplis, exigeroient 83×2, ou 166 perches; donc ſi la première ligne avoit été remplie, il auroit fallu $84+166$, c'eſt-à-dire, 250 perches: de plus, le nombre des perches ſuffiſant pour remplir les intervalles de la ſeconde ligne étoit 83×4, ou 332; donc ſi la ſeconde ligne avoit été remplie, elle auroit exigé $84+332$, c'eſt-à-dire, 416 perches: or ſi le nombre, que nous avons aſſigné eſt juſte, les longueurs des deux lignes doivent être entre elles, comme le nombre des perches qu'il auroit fallu pour les remplir; & c'eſt ce qui ſe trouve auſſi: car 125 pouces ſont à 208 pouces, comme 125×2 à 208×2, c'eſt-à-dire, comme 250 à 416, ce qu'il falloit demontrer.

SOLUTION.

Soit x le nombre des perches; cela étant le nombre des intervalles ſera $x-1$; & le nombre des perches ſuffiſant pour remplir les intervalles de la premiére ligne, $2x-2$; & le nombre des perches que la premiére ligne auroit exigé, ſi elle avoit été remplie, $3x-2$: de plus, le nombre des perches néceſſaire pour remplir les intervalles de la ſeconde ligne ſera $4x-4$, & par conſéquent le nombre des perches qu'il auroit fallu

pour

pour remplir la feconde ligne, fera $5x-4$, ce qui nous donne cette proportion, $3x-2$ font à $5x-4$, comme 125 à 208; donc $624x-416=625x-500$; donc $x-500=-416$; donc le nombre des perches eft 84, comme il a été dit.

De la méthode de réfoudre les Problêmes, où il y a plufieurs quantités inconnues, repréfentées par différentes lettres.

70. Jusqu'ici nous n'avons dans chaque problême fait ufage que d'une feule lettre, pour défigner une quantité inconnue qui s'y trouvoit; & s'il y en avoit davantage, les autres ont tiré leurs noms des conditions du problême; mais dans des cas plus compliqués, où plufieurs quantités font embarraffées l'une dans l'autre, cette méthode ne fe trouve guéres praticable. Pour faciliter l'opération dans ces fortes de cas, l'Algébrifte fe fert d'autant de lettres différentes, qu'il y a de quantités inconnues, pourvu qu'il puiffe trouver autant d'équations indépendantes pour déterminer leurs valeurs; voy. Art. 92: car quoique dans chaque équation où il y a plufieurs quantités inconnues, l'une empêche qu'on ne trouve l'autre; cependant, fi l'on peut avoir d'abord autant d'équations fondamentales qu'il y a de quantités inconnues, il ne fera pas difficile dans plufieurs cas, de dériver de ces équations quelques autres plus fimples, jusqu'à ce qu'on arrive enfin à une équation, qui ne contienne qu'une feule quantité inconnue. Quand cela arrive, les autres inconnues fe trouvent exterminées.

Toutes les fois qu'on propofe deux ou plus de deux équations, ces équations doivent d'abord être préparées en les délivrant de leurs fractions, fi elles en ont, & en difpofant chaque équation particuliére de telle forte, que toutes les quantités inconnues forment un des membres de l'équation, & les quantités connues l'autre membre; ou bien, que toutes les quantités, tant connues qu'inconnues, foient dans un des membres de l'équation, & zéro dans l'autre: il eft bon auffi, que dans chaque équation particuliére les quantités inconnues foient placées dans le même ordre.

En prefcrivant des régles fur la maniére d'exterminer des quantités inconnues, je commencerai par le cas le plus fimple, qui eft celui de deux équations & de deux inconnues; & quand j'aurai donné, rélativement à ce cas, autant d'exemples que je jugerai néceffaires, j'en ajoûterai enfuite d'autres, où il y aura un plus grand nombre de quantités inconnues à exterminer.

Mais je ne dois pas oublier d'avertir le Lecteur, que comme il n'eft queftion ici que d'équations fimples, & de problêmes qui donnent de pareilles équations, je laifferai là tous les cas, dans lesquels, après avoir ex-

exterminé les inconnues, j'arriverois à des équations plus élevées: quand je traiterai des équations du fecond degré, je pourrai peut-être dire quelque chofe de plus fur ce fujet: mais entreprendre d'expliquer toutes les différentes façons d'exterminer des quantités inconnues feroit une tâche pénible, & pas moins ennuyeufe pour l'Ecrivain que pour le Lecteur, que je ne faurois fuppofer affez avancé dans l'analyfe pour vouloir fe donner cette peine.

Soient donc x & y les deux quantités inconnues qu'il s'agit de trouver par le fecours des deux équations fuivantes $4x-5y=2$, & $6x-7y=4$. Voici comment la queftion peut être pofée; fi $4x-5y=2$, & $6x-7y=4$, quelle eft la valeur de x & celle de y? Or comme ces équations n'ont befoin d'aucune préparation, placez l'une de ces équations au-deffous de l'autre; puis fur un morceau de papier à part multipliez la premiére équation ($4x-5y=2$) par 6 coëfficient de x dans la feconde, & le produit donnera cette équation $24x-30y=12$: enfuite, multipliez la feconde équation ($6x-7y=4$) par 4, coëfficient de x dans la premiére équation, & le produit donnera $24x-28y=16$; retranchez quelle de ces deux équations que vous voudrez de l'autre, & l'inconnue x fera exterminée: dans le cas préfent je retranche la premiére équation de la feconde, afin que le coëfficient de y puiffe, après la fouftraction, être affirmatif;

$$\begin{array}{r} 24x-28y=16 \\ \underline{24x-30y=12} \\ *+2y=4. \end{array}$$

Cette fouftraction me donne l'équation fuivante, $2y=4$, que je place au-deffous des deux premiéres pour en avoir une troifiéme; puis réfolvant cette troifiéme équation $2y=4$, je trouve $y=2$, c'eft-à-dire, une quatriéme équation, que je mets au-deffous des trois autres.

Ayant ainfi déterminé la valeur de $y=2$, je fubftitue cette valeur aulieu de y dans la plus fimple des deux premiéres équations, c'eft-à-dire, dans l'équation $4x-5y=2$, & j'ai $4x-10=2$; donc $4x=12$ & $x=3$: égalité, dont je forme une cinquiéme équation; après quoi, il ne me refte plus rien à faire; car x étant trouvé égal à trois, & y égal à deux, ces nombres trois & deux étant fubftitués à la place de x & de y refpectivement, fatisferont aux conditions du problême, c'eft-à-dire, $4x-5y=12-10=2$, & $6x-7y=18-14=4$.

$$\begin{array}{lrr} 1.\ \text{Equ.} & 4x-5y= & 2. \\ 2. & 6x-7y= & 4. \\ 3. & *+2y= & 4. \\ 4. & *\quad y= & 2. \\ 5. & x\quad *= & 3. \end{array}$$

Les coëfficiens de x, quantité inconnue qui devoit être exterminée dans les deux premiéres équations, étoient 4 & 6; or comme ces nombres sont susceptibles d'un diviseur commun sans reste, savoir 2, divisez l'un & l'autre par 2, & les quotiens seront 2 & 3; ainsi servez-vous de ces nombres 2 & 3, au-lieu de 4 & de 6, & l'équation qui en résultera, deviendra plus simple: car la premiére équation multipliée par 3 au-lieu de l'être par 6, donne $12x - 15y = 6$; & la seconde équation, multipliée par 2, au-lieu de l'être par 4, donne $12x - 14y = 8$; & la différence de ces équations est $y = 2$.

Voici une autre maniére d'exterminer l'inconnue x: déterminez la valeur de x rélativement à y, dans la plus simple des deux premiéres équations, & vous aurez une équation dans laquelle il ne se trouvera d'autre inconnue que y: ainsi dans l'exemple précédent, la premiére équation étoit $4x - 5y = 2$: par conséquent $4x = 5y + 2$, & $x = \frac{5y+2}{4}$; substituez présentement cette valeur $\left(\frac{5y+2}{4}\right)$ au-lieu de x dans la seconde équation, $6x - 7y = 4$, en faisant $6x = \frac{30y+12}{4}$, & vous aurez cette équation, $\frac{30y+12}{4} - 7y = 4$; donc $30y + 12 - 28y = 16$; donc $2y + 12 = 16$; donc $2y = 4$, & $y = 2$; & x, ou $\frac{5y+2}{4} = 3$.

N. B. 1°. Ce qui a été dit touchant la maniére d'exterminer la quantité x, s'applique également à l'autre quantité y, excepté que ses coëfficiens 5 & 7 n'admettent point de diviseur commun, comme faisoient 4 & 6.

2°. Des deux méthodes que nous venons d'indiquer, tantôt l'une sera la plus abrégée, & tantôt l'autre, comme il paroîtra par les problêmes suivans.

3°. S'il y a deux quantités inconnues, & que la valeur de l'une des deux puisse se trouver en nombres entiers dans les deux équations, comparez ensemble les deux valeurs, & vous aurez la valeur de l'autre quantité inconnue, par le moyen de laquelle se trouvera ensuite celle de la premiére; & c'est-là une troisiéme méthode d'exterminer, l'une après l'autre, des inconnues: c'est de quoi les problêmes suivans nous fourniront tant d'exemples, que nous croyons ne pas devoir nous étendre davantage sur cet article.

Toutes les fois que deux quantités, comme x & y, produisent par leur multiplication une troisiéme quantité xy, les deux grandeurs x & y s'appellent efficiens, & sont les coëfficiens respectifs l'une de l'autre: ainsi

si dans la grandeur xy, x est le coëfficient de y, & y le coëfficient de x; c'est pourquoi, si dans quelque quantité, où x se trouve comme efficient, on demande le coëfficient de x; divisez cette quantité par x, & le quotient sera le coëfficient cherché; par exemple, si la quantité $12x-yx$ est divisée par x, le quotient sera $12-y$; par conséquent dans la quantité $12x-yx$, le coëfficient de x est $12-y$.

Avertissement.

Le Lecteur ne doit plus s'attendre, que nous lui épargnerons la peine de résoudre toutes les équations simples, comme nous avons fait jusqu'ici. Si après 16 exemples d'équations résolues, & la solution de quarante-quatre problêmes Algébraïques, il ne sait pas encore comment s'y prendre pour résoudre une équation simple, nous ne pouvons attribuer cette ignorance qu'à une cause qui n'est pas susceptible de guérison, ou qui n'en mérite pas.

Probleme 45.

71. *On demande deux nombres, dont le produit est 144, & dont le quotient, si l'on divise le plus grand par le plus petit, est 16.*

Solution.

Soit le plus grand nombre nommé x, & le plus petit y; cela étant, la question, exprimée en langage Algébraïque, sera: si $xy=144$, & $\frac{x}{y}=16$, quelle est la valeur de x, & celle de y?

La premiére de ces équations ne demande aucune préparation, & par cela même peut s'exprimer ainsi;

Equ. 1re, $xy \quad * =144$.

La seconde équation, quand elle aura été préparée, comme il a été dit dans le dernier article, sera;

Equ. 2de, $x-16y=0$.

Multipliez la premiére équation par 1, coëfficient de x dans la seconde, & l'équation, à laquelle une pareille multiplication ne change rien, sera toujours $xy * =144$; multipliez aussi la seconde équation par y, qui, suivant l'article précédent, est le coëfficient de x dans la premiére équation, & vous aurez $xy-16yy=0$; retranchez ce dernier produit du premier, & vous aurez

Equ. 3éme, $* \quad 16yy=144$; donc

Equ. 4éme, $* \quad y=3$.

Substituez présentement 3 à la place de y, ou $3x$ au-lieu de xy dans la premiére équation, & vous aurez $3x = 144$, & par conséquent,

Equ. 5^{éme}, $x \quad * = 48$.

De sorte que les nombres cherchés se trouvent enfin être 48 & 3; & ces nombres satisfont aux conditions du probléme: car $48 \times 3 = 144$, & $\frac{48}{3} = 16$.

$$\begin{array}{lllll} \text{Equ.} & 1. & xy & * & = 144. \\ & 2. & x - 16\,y & & = 0. \\ & 3. & * & 16\,yy & = 144. \\ & 4. & * & y & = 3. \\ & 5. & x & * & = 48. \end{array}$$

Autre solution du Probléme précédent, fondée sur le dernier Article.

Ayant trouvé par la seconde équation que $x = 16y$, substituez $16y$ à la place de x, ou $16yy$ à la place de xy dans la premiére équation, & vous aurez $16yy = 144$; ce qui donnera les valeurs de x & de y telles qu'elles ont été trouvées auparavant.

PROBLEME 46.

72. *On demande deux nombres qui ayent les propriétés suivantes, savoir, que le premier avec la moitié du second soit égal à 20, & de plus que le second avec un tiers du premier soit aussi égal à 20.*

SOLUTION.

Soit x le premier nombre, & y le second: les équations fondamentales seront $x + \frac{y}{2} = 20$, & $y + \frac{x}{3} = 20$. Ces équations, préparées suivant l'Art. 70. se trouveront être alors

Eq. 1. $2x + y = 40$.

Eq. 2. $x + 3y = 60$.

Retranchez la premiére équation de deux fois la seconde, & vous aurez

Eq. 3. $* \quad 5y = 80$; donc

Eq. 4. $* \quad y = 16$.

Substituez 16 à la place de y dans la premiére équation, & vous aurez $2x + 16 = 40$, donc

Eq. 5. $x \quad * = 12$.

Ainsi les nombres trouvés sont 12 & 16, & point 16 & 12, quoique le nombre 16 ait été trouvé le premier; à cause que $x = 12$ a été mis pour

pour le premier nombre. Au reste, il est clair que ces nombres satisfont aux conditions du problême: car $12+\frac{16}{2}$, ou $12+8=20$; & $16+\frac{12}{3}$, ou $16+4=20$.

Autre Solution fondée sur l'Art. 70.

Ayant trouvé par la seconde équation $x=60-3y$, substituez $60-3y$ à la place de x, ou $120-6y$ à la place de $2x$ dans la premiére équation, & vous aurez $120-6y+y=40$; donc $y=16$, comme ci-dessus.

PROBLEME 47.

73. *Quelqu'un reçoit en échange 6 ducatons & 2 écus pour 45 schellings; & dans un autre tems 9 ducatons & 5 écus de la même monnoye pour 76 schellings, je demande les valeurs respectives d'un ducaton & d'un écu.*

SOLUTION.

Appellez x & y le nombre des schellings qu'un ducaton & un écu valent respectivement, & les équations seront,

Eq. 1ére, $6x+2y=45$.
Eq. 2de, $9x+5y=76$.

Retranchez trois fois la premiére équation de deux fois la seconde, & vous aurez

Eq. 3éme, $*\quad 4y=17$; par conséquent
Eq. 4éme, $*\quad y=4\frac{1}{4}$ schellings;

c'est-à-dire, 4 schellings & 3 sous; substituez présentement $4\frac{1}{4}$ à la place de y, ou $8\frac{1}{2}$ à la place de $2y$ dans la premiére équation, & vous aurez $6x+8\frac{1}{2}=45$, & $6x=36\frac{1}{2}$, &

Eq. 5éme, $x\quad *\quad =6\frac{1}{12}$;

c'est-à-dire, $6\frac{1}{12}$ schellings, ou 6 schellings & un sou; donc la valeur d'un ducaton étoit 6 schellings & un sou, & celle d'un écu 4 schellings & 3 sous: valeurs qui satisfont aux conditions du problême; car à ce compte 6 ducatons font 36 schellings & 6 sous, & 2 écus font 8 schellings & 6 sous, & le tout 45 schellings; de plus, 9 ducatons font 54 schellings & 9 sous, 5 écus font 21 schellings & 3 sous, & la somme totale monte à 76 schellings.

PROBLEME 48.

74. *On demande deux nombres tels, que la moitié du premier avec un tiers du second fasse 32; & outre cela, qu'un quart du premier avec un cinquiéme du second fasse 18.*

SOLUTION.

Appellez les deux nombres x & y, & vous aurez pour équations fondamentales, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=32$, & $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=18$: ces équations, changées suivant les règles, seront;

$$\text{Eq. 1}^{\text{ére}},\ 3x+2y=192.$$
$$\text{Eq. 2}^{\text{de}},\ 5x+4y=360.$$

Retranchez 5 fois la premiére équation de 3 fois la seconde, & vous aurez,

$$\text{Eq. 3}^{\text{éme}},\ *\quad 2y=120;\ \text{donc}$$
$$\text{Eq. 4}^{\text{éme}},\ *\quad y=60.$$

En comparant cette équation avec la premiére $3x+2y$, ou $3x+120=192$, on trouve

$$\text{Eq. 5}^{\text{éme}},\ x\ *\ =24.$$

Ainsi les nombres cherchés sont 24 & 60: aussi satisfont-ils à la question: car $\frac{24}{2}+\frac{60}{3}$, c'est-à-dire, $12+20=32$; & de plus, $\frac{24}{4}+\frac{60}{5}$, c'est-à-dire, $6+12=18$.

PROBLEME 49.

75. A *dit à* B, *il y a 7 ans que j'étois trois fois plus âgé que vous, & dans 7 ans j'aurai précisément le double de votre âge: je demande l'âge actuel de l'un & de l'autre.*

SOLUTION.

Que a & b désignent les âges actuels de A & de B respectivement; cela étant leurs âges 7 ans auparavant étoient $a-7$ & $b-7$; donc, & par les conditions du problême, nous avons les deux équations fondamentales suivantes;

$$a-7=\overline{b-7}\times 3=3b-21,\ \&$$
$$a+7=\overline{b+7}\times 2=2b+14.$$

La premiére de ces équations, savoir $a-7=3b-21$ donne $a=3b-14$; la séconde, savoir $a+7=2b+14$, donne $a=2b+7$; donc $3b-14=2b+7$, l'une & l'autre de ces quantités étant $=a$; donc $b=21$, & $2b+7$ ou $a=49$.

A avoit donc 49 ans, & B 21; ce qui est vrai: car à ce compte A auroit eu auparavant 42 ans, & B 14: or $42=14\times 3$: d'un autre côté 7 ans après, A devoit avoir 56 ans, & B 28: or $56=28\times 2$.

PRO-

PROBLEME 50.

76. *Un Maquignon à deux chevaux*, A & B, *dont on lui demande le prix: il a aussi deux selles, l'une estimée* 12 *livres & l'autre* 2: *or s'il met la meilleure selle sur* A, *& la moins bonne sur* B, *le prix de* A *sera double de celui de* B; *mais s'il met la meilleure selle sur* B, *& la moins bonne sur* A, *le prix de* B *sera alors triple de celui de* A: *je demande le prix de chaque cheval*

SOLUTION.

Que a & b désignent en livres les prix des deux chevaux respectivement; cela étant, si la meilleure selle est mise sur A, & la plus mauvaise sur B, A vaudra $a+12$, & B vaudra $b+2$, & la premiére équation fondamentale sera $a+12=\overline{b+2}\times 2=2b+4$; d'un autre côté, si la meilleure selle est mise sur B, & la plus mauvaise sur A, B vaudra $b+12$, & A vaudra $a+2$, & la seconde équation fondamentale sera $b+12=\overline{a+2}\times 3=3a+6$: dans la premiére équation fondamentale, où $a+12=2b+4$, nous avons $a=2b-8$; substituez donc $2b-8$ à la place de a, ou plutôt $6b-24$ à la place de $3a$, dans la seconde équation fondamentale (qui est $3a+6=b+12$) & vous aurez $6b-24+6$, c'est-à-dire, $6b-18=b+12$; donc $b=6$, & $2b-8$, ou $a=4$: ainsi le prix de A étoit 4 livres, & celui de B 6, & ces nombres satisfont aux conditions du probléme.

PROBLEME 51.

77. *Il y a une fraction, qui, si l'on ajoûte une unité au numérateur, sera* $=\frac{1}{3}$; *mais si l'on ajoûte cette unité au dénominateur, elle vaudra* $\frac{1}{4}$: *je demande le numérateur & le dénominateur de cette fraction.*

SOLUTION.

Appellez cette fraction $\frac{x}{y}$, & vous aurez ces deux équations fondamentales, $\frac{x+1}{y}=\frac{1}{3}$, & $\frac{x}{y+1}=\frac{1}{4}$: la premiére de ces équations donne $y=3x+3$, & la derniére donne $y=4x-1$; donc $4x-1=3x+3$, chacune de ces grandeurs étant égale à y; donc x, numérateur de la fraction, est 4; & $3x+3$, ou y, dénominateur de la fraction, $=15$; & la fraction elle-même est $\frac{4}{15}$: car si l'on ajoûte une unité au numérateur, on aura $\frac{5}{15}$, ou $\frac{1}{3}$; mais si l'unité est ajoûtée au dénominateur, la fraction sera $\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$.

PRO-

PROBLEME 52.

78. *Il y a une perche composée de deux parties jointes ensemble bout à bout, & dont la partie supérieure est à la partie inférieure comme 5 à 7; de plus, la partie supérieure 9 fois, avec 13 fois la partie inférieure, est égale à 11 fois toute la perche + 36 pouces: je demande la longueur de chaque partie.*

SOLUTION.

Désignez par x la longueur de la partie supérieure réduite en pouces, & la partie inférieure par y; cela étant, la longueur entiére sera $x+y$; & comme x est à y, comme 5 à 7 par l'hypothése, nous aurons $7x=5y$ pour équation fondamentale: de plus, comme la partie supérieure prise 9 fois, avec 13 fois la partie inférieure, est égale à 11 fois toute la perche + 36 pouces, nous avons $9x+13y=11x+11y+36$ pour seconde équation fondamentale: la derniére de ces deux équations donne $x=y-18$, & par conséquent $7x=7y-126$; substituez cette valeur à la place de $7x$, dans la premiére équation fondamentale, ou $7x=5y$, & vous aurez $7y-126=5y$; donc $y=63$, & $y-18$, ou $x=45$.

La partie supérieure étoit donc de 45 pouces, & la plus petite de 63.

PROBLEME 53.

79. *Quelqu'un achète une certaine quantité de pommes & de poires pour deux schellings & six sous, & paye les pommes à raison de 4 pour un sou, & les poires à raison de 5 pour un sou; ensuite il céde à son voisin la moitié de ses pommes & le tiers de ses poires pour 13 sous, ce qui étoit le prix qu'elles lui coutoient: je demande combien il en avoit acheté de chaque sorte.*

SOLUTION.

Soit x le nombre des pommes & y celui des poires: cela étant, si 4 pommes coutent un sou, x coutera en sous $\frac{x}{4}$, & par la même raison y coutera en sous $\frac{y}{5}$, & nous aurons $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=30$ pour premiére équation fondamentale: de plus, le prix de $\frac{x}{2}$, moitié de ses pommes, sera $\frac{x}{8}$, & le prix de $\frac{y}{3}$, tiers de ses poires, sera $\frac{y}{15}$; ce qui nous donne pour seconde équation fondamentale $\frac{x}{8}+\frac{y}{15}=13$. Donc

Eq. 1ére, $5x+4y=600$.

Eq. 2de, $15x+8y=1560$.

Re-

Retranchez la séconde équation de trois fois la premiére, suivant l'Art. 70, & vous aurez

Eq. 3éme, * $4y = 240$. Donc

Eq. 4éme, * $y = 60$.

Substituez présentement 60 à la place de y, c'est-à-dire, 240 à la place de $4y$ dans la premiére équation $5x + 4y = 600$, & vous aurez $5x + 240 = 600$, Donc

Eq. 5éme, x * $= 72$.

Ainsi le nombre des pommes étoit 72, & celui des poires 60.

PROBLEME 54.

80. *Un lévrier voyant un liévre éloigné de lui à la distance de cinquante de ses propres sauts, le poursuit, en faisant trois sauts pour quatre sauts que le liévre fait; & de plus, en faisant autant de chemin en deux sauts que le liévre en fait en trois: je demande le nombre de sauts que chacun de ces animaux fera durant toute la course.*

SOLUTION.

Le nombre des sauts du lévrier durant toute la course, x.

Le nombre des sauts du liévre durant le même tems, y.

Donc durant le tems que le lévrier fait le nombre de sauts x, le liévre fait le nombre de sauts y; mais suivant le problême, pendant que le chien fait trois sauts, le liévre en fait quatre; donc x est à y, comme 3 à 4; ce qui nous donne $4x = 3y$: de plus depuis le gîte du liévre jusqu'au bout de la course, le chien a fait $x - 50$ sauts, & autant de chemin que le liévre en a fait dans tous ses sauts y; mais suivant le problême, le chien a avancé autant en deux sauts que le liévre en trois; donc $x - 50$ est à y, comme 2 à 3; & nous avons $3x - 150 = 2y$: le reste de la solution se trouve ainsi,

Eq. 1ére, $4x - 3y = 0$.

Eq. 2de, $3x - 2y = 150$.

Retranchez trois fois la premiére équation de quatre fois la seconde, & vous aurez

Eq. 3éme, * $y = 600$.

Substituez 600 à la place de y dans la premiére équation, & vous trouverez $4x - 3y$, c'est-à-dire, $4x - 1800 = 0$; donc

Eq. 4éme. x * $= 450$.

Donc le lévrier a fait 450 sauts, & le liévre 600 durant toute la course; & 450 sont à 600, comme $\frac{450}{150}$ sont à $\frac{600}{150}$; c'est-à-dire, comme

3 à 4 de plus, depuis le gîte du liévre, jusqu'au bout de la course, le chien a fait 400 sauts; & 400 sont à 600 comme 4 à 6, ou comme 2 à 3.

Probleme 55.

81. *On demande deux nombres* x & y, *qui soient tels, que si on les multiplie l'un & l'autre par 18, le premier produit soit un quarré, & que le second soit la racine ou le côté de ce quarré; mais si on les multiplie par 3, le premier produit soit un cube, & le second le côté de ce cube.*

Solution.

En multipliant séparément x & y par 18, les produits seront $18x$ & $18y$, dont le premier doit être un quarré, & le second le côté de ce quarré, c'est-à-dire, en d'autres termes, le premier produit doit être égal au quarré de l'autre; ainsi nous avons $18x = 324yy$, & $x = 18yy$: de plus, si l'on multiplie x & y par 3, les produits seront $3x$ & $3y$, dont le premier est égal au cube de l'autre; c'est-à-dire, $3x = 27y^3$, & $x = 9y^3$; donc $9y^3 = 18y^2$, l'une & l'autre de ces grandeurs étant égales à x; donc $y = 2$, & $9y^3$ ou $x = 72$; de sorte que les nombres cherchés sont 72 & 2, qui satisferont aux conditions du probléme: car si on les multiplie séparément par 18, les produits seront 1296 & 36, dont le premier est un quarré, & le dernier le côté de ce même quarré; mais si les nombres 72 & 2 sont multipliés séparément par 3, les produits seront 216 & 6, dont le premier nombre est un cube, qui a l'autre nombre pour côté.

Probleme 56.

82. *Il y a un pavé en forme de rectangle ou de quarré oblong, dont les dimensions sont telles, que s'il avoit été de deux pieds plus large, & de trois pieds plus long, il auroit eu soixante-quatre pieds quarrés de largeur de plus; mais d'un autre côté, s'il avoit été de trois pieds plus large, & de deux pieds plus long, il auroit en ce cas eu soixante-huit pieds quarrés de largeur de plus: je demande la longueur & la largeur du pavé.*

Solution.

Soit x la largeur & y la longueur du pavé; en ce cas son aire, ou le nombre de ses pieds quarrés sera $x \times y$ ou xy; mais s'il avoit été de 2 pieds plus large, & de 3 pieds plus long, son aire auroit été $\overline{x+2} \times \overline{y+3}$, c'est-à-dire, $xy + 3x + 2y + 6$; & comme, par l'hypothése, cette aire doit surpasser la véritable aire de 64 pieds quarrés, nous avons l'équa-

l'équation suivante, $xy+64=xy+3x+2y+6$: d'un autre côté, si ce pavé avoit été de 3 pieds plus large, & de 2 pieds plus long, son aire auroit été $\overline{x+3}\times\overline{y+2}$, c'est-à-dire, $xy+2x+3y+6$; & cette derniére aire doit surpasser la véritable de 68 pieds quarrés; ce qui donne cette équation, $xy+68=xy+2x+3y+6$; donc

Eq. 1ére, $3x+2y=58$.
Eq. 2de, $2x+3y=62$.

Retranchez deux fois la premiére équation de trois fois la seconde, & vous aurez,

Eq. 3éme, $*\ \ 5y=70$; &
Eq. 4éme, $*\ \ y=14$.

Substituez présentement 14 à la place de y, ou 28 à la place de $2y$ dans la premiére équation $3x+2y=58$, & vous aurez $3x+28=58$; donc

Eq. 5éme, $x\ \ *=10$.

Le pavé avoit par conséquent 10 pieds de large, & 14 pieds de long; & son aire étoit de 140 pieds quarrés, ce qui satisfait aux conditions du probléme; car si le pavé avoit été plus large de 2 pieds, & plus long de 3, son aire auroit été $12\times17=204=140+64$; mais s'il avoit été plus large de 3 pieds, & plus long de 2, son aire auroit été $13\times16=208=140+68$.

PROBLÉME 57.

83. *Une compagnie payant son écot au cabaret trouve que s'il y avoit eu trois personnes de plus, il en auroit couté un schelling moins par tête, & que s'il y avoit eu deux personnes de moins, il en auroit couté un schelling par tête de plus; on demande le nombre des personnes, & leur quotepart.*

SOLUTION.

Soit x le nombre des personnes, & y celui des schellings que chacune d'elles paye actuellement; si 4 personnes devoient payer 5 schellings par tête, tout le compte seroit 4×5 ou 20 schellings; donc si le nombre de personnes x doit payer par tête le nombre de schellings y, le compte total sera $y\times x$ ou xy de schellings: cela étant, supposons présentement que la compagnie soit composée de 3 personnes de plus, en ce cas la compagnie sera $x+3$; & pour déterminer ce que chaque personne doit payer alors par tête, le compte total xy, doit être divisé par $x+3$, nombre des personnes, & le quotient $\frac{xy}{x+3}$ sera la quotepart de chaque personne; mais suivant le probléme, le compte particulier de chacun seroit un schel-

schelling de moins qu'il n'est actuellement, c'est-à-dire, $y-1$; donc $\frac{xy}{x+3}=y-1$; de même la seconde condition du problême fournit cette équation, $\frac{xy}{x-2}=y+1$: la premiére de ces équations, savoir, $\frac{xy}{x+3}=y-1$ étant réduite donne $x=3y-3$; & la seconde équation, savoir, $\frac{xy}{x-2}=y+1$ étant réduite donne $x=2y+2$; donc $3y-3=2y+2$, & $y=5$; donc $2y+2$, ou $x=12$.

Ainsi la compagnie étoit de 12 personnes, leur compte de 5 schellings par tête, & la somme totale de 60 schellings; ce qui satisfait aux conditions du problême: car $\frac{60}{15}=4$, & $\frac{60}{10}=6$.

PROBLEME 58.

84. *Un Cabaretier a deux sortes de vins, dont les valeurs sont telles, que s'il les mêle en raison de deux à trois, c'est-à-dire, que s'il mêle deux pots du meilleur vin avec trois pots du plus mauvais, le mêlange vaudra vingt & un sous le pot; mais s'il les mêle en raison de sept à huit, c'est-à-dire, que s'il mêle sept pots de la meilleure sorte avec huit pots de la plus mauvaise, le mêlange vaudra vingt & deux sous le pot: je demande le prix d'un pot de chaque sorte.*

SOLUTION.

Soit x le prix en sous d'un pot de la meilleure sorte, & y pareillement en sous le prix d'un pot de la moindre sorte; ainsi en mêlant deux pots de la meilleure sorte avec trois pots de la plus mauvaise, le mêlange sera $2x+3y$; mais comme il y a cinq pots de ce mêlange, & que chaque pot vaut 21 sous, tout le mêlange doit valoir 105 sous; ce qui nous donne cette équation $2x+3y=105$: pareillement l'autre condition du problême fournit cette équation, $7x+8y=22\times 15=330$: ces équations peuvent se résoudre ainsi.

Eq. 1. $2x+3y=105$.	Eq. 4. * $y=15$.
Eq. 2. $7x+8y=330$.	Eq. 5. x * $=30$.
Eq. 3. * $5y=75$.	

Ainsi la meilleure sorte de vin valoit 30 sous le pot, & la plus mauvaise 15; ce qui répond aux conditions du problême: car, à ce compte, deux pots de la meilleure sorte vaudront 60 sous, & trois de la plus mauvaise 45 sous, les cinq pots 105 sous, & un seul pot de ce mêlanlange 21 sous; de plus, sept pots de la meilleure sorte vaudront 210

sous

sous, huit de la plus mauvaise 120 sous, les quinze pots 330 sous, & un seul pot de ce mêlange 22 sous.

PROBLEME 59.

85. *Il y a un certain nombre composé de deux caractéres, qui est égal à quatre fois la somme de ces caractéres pris séparément & ajoûtés ensemble; & si à ce nombre on ajoûte 18, on aura une somme égale à celle que le premier nombre formeroit, si on en transposoit les caractéres. Je demande ce nombre.*

SOLUTION.

Mettez x pour le caractére qui occupe la place des dixaines, & y pour le caractére qui occupe la place des unités, & la somme sera $x+y$; mais comment faut-il s'y prendre pour lire un pareil nombre, qui a x à la place des dixaines, & y à celle des unités? La chose ne paroîtra guéres difficile, si l'on fait attention qu'un nombre composé de deux caractéres, comme 36, par exemple, est tel, que les 6, qui se trouvent à l'endroit des unités, n'ont précisément que leur valeur, mais que les 3, qui sont dans l'endroit des dixaines, ne désignent pas 3, mais 30, nombre dix fois plus grand que 3; desorte qu'on lit le nombre 36, comme s'il y avoit $30+6$; ainsi un nombre qui a x à l'endroit des dixaines, & y à celui des unités, doit se lire ainsi, $10x+y$; & si les mêmes caractéres étoient transposés, se liroit $10y+x$: cet éclarcissement étant donné, les équations fondamentales se déduiront aisément des conditions du problême de la maniére suivante; $10x+y=4x+4y$, & $10x+y+18=10y+x$. La premiére équation étant réduite donne $y=2x$, & la derniére donne $y=x+2$; donc $2x=x+2$; ainsi $x=2$, $2x$ ou $y=4$, & le nombre cherché est 24; dont les caractéres pris séparément, & ajoûtés ensemble, valent 6. Il est bien clair que ce nombre satisfait aux conditions du problême; car $24=4$ fois 6; & $24+18=42$.

LEMME.

86. *S'il y a quelque quantité complexe consistant en deux multiples de* x *& de* y, *dont l'un soit affirmatif & l'autre négatif, & que cette quantité composée doive être soustraite de* $x+y$; *cette soustraction se fera aisément ainsi: changez les signes des deux parties qu'il s'agit de soustraire; puis augmentez d'une unité le coëfficient de la partie affirmative, & diminuez d'une unité le coëfficient de la partie négative, & vous aurez le reste*: par exemple, s'il faut soustraire $6x-10y$ de $x+y$, commencez par changer les

 signes

signes de $6x-10y$, & vous aurez $10y-6x$; augmentez ensuite d'une unité le coëfficient affirmatif 10, & diminuez d'une unité le coëfficient négatif 6, & vous aurez $11y-5x$ pour reste, comme on peut le voir du premier coup d'œil en retranchant $6x-10y$ de $x+y$: si $2y$, c'est-à-dire, $2y-0x$, devoient être soustraits de $x+y$, le reste seroit $x-y$.

Probleme 60.

87. *A & B ont chacun un certain nombre de jettons; A donne à B autant de jettons que B en a déjà; après quoi B en donne à A autant que A en avoit gardés; puis A en donne à B autant que B en avoit gardés, & ainsi de suite; & après quatre dons faits de cette manière il se trouve que chacun d'eux a seize jettons: je demande combien chacun en avoit d'abord.*

Solution.

Soit x le nombre des jettons de *A*, & y celui de *B*; la somme de leurs jettons sera donc au commencement $x+y$; à cause que les dons, qui pourront dans la suite se faire entre eux, n'augmenteront, ni ne diminueront le nombre des jettons; donc si dans quelque cas le nombre des jettons de *A* ou de *B* est donné, il suffira de retrancher ce nombre de $x+y$, & le reste exprimera ce qui manque à la somme totale. C'est ce qui nous fournit la solution suivante.

Le nombre des jettons de *A*, x.
Celui des jettons de *B*, y.
Celui de *B*, après le premier don fait par *A*, $2y$.
Celui de *A*, dans ce même tems, $x-y$.
Celui de *A*, après le premier don fait par *B*, $2x-2y$.
Celui de *B*, dans ce même tems, $3y-x$.
Celui de *B*, après le second don fait par *A*, $6y-2x$.
Celui de *A*, dans ce même tems, $3x-5y$.
Celui de *A*, après le second don fait par *B*, $6x-10y$.
Celui de *B*, dans ce même tems, $11y-5x$.

De cette manière le nombre des dons peut se pousser aussi loin qu'on voudra: mais suivant le problême, après quatre dons ainsi faits, *A* & *B* avoient chacun 16 jettons; ce qui nous donne les deux équations, $6x-10y=16$, & $11y-5x=16$: Donc

Eq. 1ère, $3x-5y=8$.	Eq. 4ème, $*\ y=11$.
Eq. 2de, $5x-11y=-16$.	Eq. 5ème, $x\ *=21$.
Eq. 3ème, $*\ 8y=88$.	

Ainsi



Ainsi A avoit 21 jettons, & B 11: Voici le calcul du tout.
Après le premier don de A, B a 22 jettons, & A $21-11=10$.
Après le premier don de B, A a 20 jettons, & B $22-10=12$.
Après le second don de A, B a 24 jettons, & A $20-12=8$.
Après le second don de B, A a 16 jettons, & B $24-8=16$

Observations sur le Problême précédent.

Si l'on est curieux de savoir comment dans ce problême & dans plusieurs autres, on peut faire choix d'un nombre donné tel que les solutions soient exprimées en nombres entiers, au-lieu que si les nombres donnés étoient pris au hazard, les solutions seroient, généralement parlant, exprimées par des fractions, il faut avoir recours au moyen suivant: supposons que dans ce problême, après quatre dons faits entre A & B, je veuille leur faire avoir à tous deux le même nombre de jettons, mais sans savoir quel nombre leur assigner à la fin, qui soit tel que chacun d'eux eût eu un nombre entier de jettons au commencement; je mets quelque lettre, comme c, pour le nombre de jettons que chacun d'eux a eu à la fin; alors les deux équations fondamentales seront, $6x-10y=c$, & $11y-5x=c$; pour les résoudre:

Eq. 1ére, $6x-10y=c$.	Eq. 3éme, * $16y=11c$.
Eq. 2de, $5x-11y=-c$.	Eq. 4éme. * $y=\frac{11c}{16}$.

Donc par la premiére équation, $6x-10y$, c'est-à-dire, $6x-\frac{110c}{16}=c$; donc $96x-110c=16c$; donc $96x=126c$; &

Eq. 5éme, x * $=\frac{126c}{96}=\frac{21c}{16}$.

De sorte que pour faire avoir à chaque personne A & B le même nombre de jettons c à la fin, le premier nombre de A doit être $\frac{21c}{16}$, & celui de B, $\frac{11c}{10}$; d'où il suit, que si à la place du nombre c, je choisis quelque autre nombre, qui puisse être divisé sans reste par 16, A & B doivent nécessairement avoir eu chacun un nombre entier au commencement; car si $\frac{c}{16}$ est un nombre entier, tant $\frac{21c}{16}$ que $\frac{11c}{16}$ doivent aussi être des nombres entiers; & c'est à cause de cela même que j'ai fait choix dans le problême du nombre de 16 à la place de c: car je m'assurois par-là, que non seulement la solution se trouveroit en nombres entiers, mais aussi que le problême seroit le plus simple en son genre, puisque 16 est le plus petit nombre qui puisse être divisé par 16.

Ce

Ce problême peut auſſi ſe réſoudre par le ſecours d'une ſeule lettre, de la maniére ſuivante: que c repréſente maintenant, non pas le nombre des jettons que chacun d'eux a eus à la fin, mais la ſomme de tous leurs jettons à la fin, & par conſéquent la ſomme de leurs jettons durant tout le cours des dons, & le lemme pour pouſſer le nombre des dons à diſcrétion, ſera: *S'il y a quelque quantité compoſée conſiſtant en deux multiples de* c *& de* x, *dont l'un ſoit affirmatif & l'autre négatif, & que cette quantité compoſée doive être ſouſtraite de* c, *le reſte ſe trouvera, premiérement en changeant les ſignes des deux parties, & puis en augmentant ou en diminuant de l'unité le coëfficient de* c, *ſuivant qu'après ce changement le coëfficient ſe trouvera affirmatif ou négatif.* Par exemple, ſi $2c-2x$ devoient être ſouſtraits de c, le reſte feroit $2x-c$; & s'il falloit ſouſtraire de c le nombre $4x-2c$, le reſte feroit $3c-4x$; ce qui donne cette ſolution du problême précédent:

Le nombre des jettons de A, x.
Celui des jettons de B, $c-x$.
Celui de B après le premier don fait par A, $2c-2x$.
Celui de A, dans ce même tems, $2x-c$.
Celui de A après le premier don fait par B, $4x-2c$.
Celui de B dans ce même tems, $3c-4x$.
Celui de B après le ſecond don fait par A, $6c-8x$.
Celui de A dans ce même tems, $8x-5c$.
Celui de A après le ſecond don fait par B, $16x-10c$.
Celui de B dans ce même tems, $11c-16x$.

Mais ſuivant le problême, après le quatriéme don, A & B avoient chacun $\frac{1}{2}c$: donc x peut ſe trouver, & ſera la même grandeur, ſoit que nous faſſions $16x-10c=\frac{c}{2}$, ou $11c-16x=\frac{c}{2}$: ſi nous faiſons $16x-10c=\frac{c}{2}$, nous aurons $32x-20c=c$, & $32x=21c$, & x, ou le nombre des jettons de $A=\frac{21c}{32}$; donc $c-x$, ou le nombre des jettons de $B=\frac{11c}{32}$; donc le problême le plus ſimple de cette ſorte (ſavoir quand il n'y a que quatre dons) qui admette une ſolution en nombre entier, eſt quand on fait $c=32$.

PROBLÈME 61.

88. *On demande deux nombres tels, que leur ſomme ſoit deux fois, & le produit de leur multiplication douze fois leur différence.*

SOLUTION.

Soit le plus grand de ces nombres x, & le plus petit y; leur différence sera $x-y$, leur somme $x+y$, & le produit de leur multiplication xy ou yx; & les équations mêmes seront $x+y=2x-2y$, & $yx=12x-12y$; donc

Eq. 1ére, $x-3y=0$.

Eq. 2de, $12x-yx-12y=0$.

Multipliez la premiére équation par $12-y$, c'est-à-dire, suivant l'Art. 70, par le coëfficient de x dans la seconde, & le produit sera $12x-yx-36y+3yy=0$; retranchez cette équation de la seconde, & vous aurez

Eq. 3éme, $24y-3yy=0$; donc

Eq. 4éme, $y=8$; &

Eq. 5éme, $x=24$.

Et les nombres 24 & 8 satisferont aux conditions du problême.

Autrement ainsi: par la premiére équation $x=3y$, & $4x=12y$: substituez $4x$ à la place de $12y$ dans la seconde équation, & vous aurez $12x-yx-4x=0$; divisez le tout par x, & il résultera $12-y-4=0$, & $y=8$, & x, ou $3y=24$.

PROBLEME 62.

89. *On demande deux nombres dont la différence, la somme & le produit soient l'un à l'autre comme sont les nombres deux, trois & cinq respectivement, c'est-à-dire, dont la différence soit à leur somme comme deux à trois, & dont la somme soit à leur produit comme trois à cinq.*

SOLUTION.

Soit le plus grand nombre appellé x, & le plus petit y; cela étant leur différence sera $x-y$, leur somme $x+y$, & le produit de leur multiplication xy: les conditions du problême donnent ces deux analogies; 1°. $x-y$ est à $x+y$, comme 2 à 3: donc $3x-3y=2x+2y$; 2°. $x+y$ est à xy, comme 3 à 5; donc $3xy=5x+5y$: donc

Eq. 1ére, $x-5y=0$.

Eq. 2de, $3yx-5x-5y=0$.

Multipliez la premiére équation par $3y-5$, le coëfficient de x dans la seconde, & le produit sera $3yx-5x-15yy+25y=0$; retranchez cette équation de la seconde, & vous aurez

Eq. 3éme, $15yy-30y=0$; donc

Eq. 4éme, $y=2$, &

Eq. 5éme, $x=10$.

Et les nombres 10 & 2 satisferont aux conditions du problême.

Autrement ainsi: par la premiére équation $x=5y$: substituez x à la place de $5y$ dans la seconde équation, & vous aurez $3xy-5x-x=0$; divisez cette équation par x, & il viendra $3y-5-1=0$ & $y=2$.

PROBLEME 63.

90. *On demande deux nombres tels, que si leur différence est multipliée par leur somme, le produit soit cinq; mais que le produit soit soixante-cinq, si la différence de leurs quarrés est multipliée par la somme de leurs quarrés.*

SOLUTION.

Soit x le plus grand nombre, & y le plus petit; leur différence sera $x-y$, leur somme $x+y$, & le produit de leur somme & de leur différence multipliées l'une par l'autre sera x^2-y^2 par l'Art. 11. Cela étant $x^2-y^2=5$, par la supposition, & $x^2=5+yy$; élevez les deux membres au quarré, & vous aurez $x^4=25+10y^2+y^4$: de plus, la différence des quarrés des deux nombres cherchés est x^2-y^2, & la somme de leurs quarrés x^2+y^2, & le produit de cette différence par cette somme x^4-y^4; donc $x^4-y^4=65$ par la supposition, & $x^4=65+y^4$; mais x^4 a été trouvé égal à $25+10y^2+y^4$; donc $25+10y^2+y^4=65+y^4$; par conséquent $y^2=4$, & $y=2$; substituez présentement 4 à la place de y^2 dans la premiére équation fondamentale, qui étoit $x^2-y^2=5$, & vous aurez $x^2-4=5$, & $x=3$; donc les nombres cherchés sont 3 & 2; & ces nombres satisfont aux conditions du problême.

PROBLEME 64.

91. *Il y a un nombre composé de trois caractéres, qui considérés chacun en eux-mêmes sont en progression arithmétique; si ce nombre est divisé par la somme de ses caractéres considérés en eux-mêmes (c'est-à-dire, sans avoir égard à la place qu'ils occupent dans le nombre cherché) le quotient sera quarante-huit; mais si l'on soustrait de ce nombre cent quatre-vingts dix-huit, les caractéres seront transposés: je demande quel est ce nombre.*

N. B. Des nombres sont en progression arithmétique, quand ils croissent ou décroissent avec d'égales différences: ainsi les nombres 5, 7 & 9 sont en progression arithmétique, de-même que 9, 7 & 5. Pour faciliter l'intelligence de la solution suivante, voyez le Problême 59.

SOLUTION.

Je pourrois mettre ici x, y & z pour les trois caractéres cherchés; mais comme ces caractéres sont en progression arithmétique, & que d'ail-

d'ailleurs une solution est plus élégante, quand on employe moins d'inconnues, je mettrai x & $x+y$ & $x+2y$ pour les trois caractéres cherchés; & puisque x & $\overline{x+y}$ & $\overline{x+2y}$ ajoûtés ensemble font $3x+3y$, il est clair que $3x+3y$ désignent la somme des caractéres: de plus, x qui occupe la place des centaines, vaut $100x$, & $x+y$, dans la place des dixaines, sont égaux à $10x+10y$, & la quantité $x+2y$, dans la place des unités, se représente simplement elle-même; & tous ces nombres ajoûtés ensemble font $111x+12y$; donc $111x+12y$ désignent le nombre cherché: enfin, quand les caractéres sont transposés $\overline{x+2y}$, occupant la place des centaines vaut $100x+200y$, $x+y$, dans la place des dixaines, vaut $10x+10y$, & x, dans la place des unités, se représente lui-même: ces nombres ajoûtés ensemble font $111x+210y$; donc $111x+210y$, représentent le nombre cherché, mais en caractéres transposés: ces éclaircissemens étant donnés, le problême nous fournit les deux équations suivantes, savoir

$$\frac{111x+12y}{3x+3y}=48, \text{ \&}$$
$$111x+12y-198=111x+210y.$$

De la premiére de ces équations, savoir, $\frac{111x+12y}{3x+3y}=48$, nous déduisons $144x+144y=111x+12y$; donc $33x+144y=12y$; donc $33x+132y=0$; donc (divisant par 33) $x+4y=0$, & $x=-4y$: quantité, qui est le résultat de la premiére équation. L'autre équation, savoir, $111x+12y-198=111x+210y$, nous donne $210y-12y=-198$, & $y=-1$; mais par le résultat de l'équation précédente, $x=-4y$, c'est-à-dire, $-4\times y$ ou $-4\times-1=+4$; donc x (le premier caractére à la gauche) $=4$; & puisque y, c'est-à-dire $+y=-1$, le caractére suivant $x+y$, sera $4-1=3$; & le dernier caractére $x+2y$ sera $4-2=2$; donc le nombre cherché est 432, ayant pour somme de ses caractéres (considérés séparément) 9: car premiérement, les caractéres 4, 3 & 2 sont en progression arithmétique; secondement $\frac{432}{9}=48$; & en troisiéme lieu, $432-198=234$.

On a pu remarquer d'abord par la nature du problême, que les caractéres devoient aller en décroissant de la gauche à la droite; cependant, je n'ai pas laissé de supposer qu'ils alloient en croissant, uniquement pour faire voir, que quoique dans de pareils cas nous puissions faire de fausses suppositions, l'Algébre néanmoins nous redresse toujours: par exemple, s'il falloit calculer le gain qui devroit résulter d'un certain accord, nous pourrions désigner ce gain par x, & continuer le calcul conformément

à ce qu'exigeroient les conditions du problême; il n'est pas impossible néanmoins qu'à la fin de l'opération x ne se trouve une quantité négative; ce qui démontreroit que ce que nous avons supposé un gain étoit une perte.

Quelques réflexions concernant les conditions des Problêmes.

92. Il a été dit dans l'Art. 70, que les équations à l'aide desquelles on découvre les valeurs des inconnues, doivent être indépendantes l'une de l'autre. Voici sur quoi cette assertion est fondée: si ces équations ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, l'une d'elles doit être une conséquence de l'autre, ou en contradiction avec l'autre; & toutes les conclusions qu'on pourroit tirer d'elles seroient, ou ridicules, ou absurdes: car si une des équations étoit une conséquence de l'autre, on parviendroit enfin à cette conclusion, qu'une chose est égale à elle-même; & si les équations étoient contradictoires, on trouveroit à la fin quelque quantité plus grande égale à une moindre quantité: comme, par exemple, que les équations soient $2x=3y$, & $4x=6y$; il est clair en ce cas, que cette derniére équation est une conséquence de la premiére, comme étant simplement la premiére même multipliée par 2; & si l'on entreprenoit de résoudre ces deux équations par quelques-unes des règles précédentes, on parviendroit à la fin à la merveilleuse découverte que $0=0$: d'un autre côté, que les équations soient $2x=3y$, & $4x=6y+7$; ici il est bien clair, que la derniére équation contredit la premiére; car si $2x$ sont égaux à $3y$, il faut nécessairement que $4x$ soient égaux à $6y$, & non pas à $6y+7$; & si l'on résout ces deux équations, ou qu'on entreprenne de les résoudre par le secours des règles précédentes, on se trouvera enfin réduit à cette absurdité, que $7=0$; & c'est ce qui arrive souvent au bout d'une opération, les équations se trouvant dépendantes l'une de l'autre, ou contradictoires l'une à l'autre, quoiqu'il n'y eût guéres moyen d'abord de remarquer la chose.

Je vais donner à-présent quelques exemples de problêmes dans lesquels il y a plus de deux quantités inconnues.

PROBLEME 65.

93. *Trois hommes, A, B & C parloient de leur argent; A dit à B & à C, donnez-moi la moitié de votre argent, & j'aurai la somme* d; *B dit à A & à C, donnez-moi le tiers de votre argent, & j'aurai aussi la somme* d; *C dit à A & à B, donnez-moi le quart de votre argent, & j'aurai pareillement la somme* d: *combien d'argent chacun d'eux avoit-il?*

N. B.

N. B. La lettre d est supposée ici tenir lieu de quelque quantité connue, qui est laissée indéterminée jusqu'à ce que le calcul soit achevé.

SOLUTION.

Que a, b & c désignent l'argent de A, B & C respectivement, & nous aurons ces trois équations fondamentales;

$$a + \frac{b+c}{2} = d;$$

$$b + \frac{a+c}{3} = d; \&$$

$$c + \frac{a+b}{4} = d.$$

Les équations préparées suivant l'Art. 70, seront

Eq. 1. $2a + b + c = 2d.$
Eq. 2. $a + 3b + c = 3d.$
Eq. 3. $a + b + 4c = 4d.$

Retranchez la premiére équation de deux fois la seconde, & vous aurez

Eq. 4. $* \quad 5b + c = 4d.$

Retranchez la troisiéme équation de la seconde, & vous aurez

Eq. 5. $* \quad 2b - 3c = -d.$

Retranchez cinq fois la premiére équation de deux fois la quatriéme, & vous aurez

Eq. 6. $* \quad * \quad 17c = 13d.$

Eq. 7. $* \quad * \quad c = \frac{13d}{17}.$

Substituez cette valeur de c dans la quatriéme équation, & vous aurez $5b + c$, c'est-à-dire $5b + \frac{13d}{17} = 4d$; donc $85b + 13d = 68d$; donc $85b = 55d$, & $b = \frac{55d}{85} = \frac{11d}{17}$; donc

Eq. 8. $* \quad b \quad * = \frac{11d}{17}.$

Substituez présentement les deux valeurs de b & de c déjà trouvées, à la place de b & de c dans la premiére équation, & vous aurez $2a + b + c$, c'est-à-dire $2a + \frac{11d + 13d}{17}$, ou $2a + \frac{24d}{17} = 2d$; donc $34a + 24d = 34d$; & $34a = 10d$; & $a = \frac{10d}{34} = \frac{5d}{17}$; donc

Eq. 9. $a \quad * \quad * = \frac{5d}{17}.$

De sorte que les nombres cherchés se trouvent à la fin être $a = \frac{5d}{17}$, b =

$=\frac{11d}{17}$, & $c=\frac{13d}{17}$; d'où il ſuit, que ſi l'on ſubſtitue quelque nombre à la place de d, qui ait 17 pour diviſeur, les grandeurs a, b & c ſeront des nombres entiers; comme, par exemple, ſi d eſt fait égal à 17, les quantités a, b & c, ſeront 5, 11 & 13 reſpectivement; & ces nombres ſatisferont aux conditions du problême, car $5+\frac{11+13}{2}$, ou $5+12=17$; $11+\frac{5+13}{3}$, ou $11+6=17$; $13+\frac{5+11}{4}$, ou $13+4=17$.

Avertiſſement. J'eſpére que le Lecteur s'eſt apperçu de lui-même, que les nombres, a, b & c doivent toujours être conſidérés comme étant de même dénomination que le nombre d; comme ſi le nombre d déſignoit autant de guinées qu'il contient d'unités, les nombres a, b, & c déſigneroient pareillement des guinées, &c.

Eq. 1. $2a+b+c=2d$.	Eq. 6. * * $17c=13d$.
2. $a+3b+c=3d$.	7. * * $c=\frac{13d}{17}$.
3. $a+b+4c=4d$.	8. * b * $=\frac{11d}{17}$.
4. a * $5b+c=4d$.	9. a * * $=\frac{5d}{17}$.
5. * $2b-3c=-d$.	

Scholie.

94. La premiére, la ſeconde & la troiſiéme des équations précédentes, dans leſquelles la quantité a eſt mêlée, peuvent s'appeller équations du premier rang; la quatriéme & la cinquiéme, dans leſquelles la quantité b eſt mêlée, & dont la quantité a eſt exclue, peuvent s'appeller équations du ſecond rang; la ſixiéme, dans laquelle c ſe trouve, & dont les quantités a & b ſont exclues, peut s'appeller équation du troiſiéme rang, & ainſi de ſuite, quelque grand que puiſſe être le nombre des quantités inconnues.

Toutes les fois que les équations de quelque rang ſont données ou trouvées, l'Analyſte, qui voudroit en déduire les équations d'un rang inférieur, eſt le maître de combiner ces premiéres équations par paires comme il lui plaît, pourvu qu'il obſerve ſeulement ces deux choſes; premiérement, que chaque équation du rang donné ſoit, durant le cours de l'opération, combinée avec quelque équation du même rang, de ſorte qu'il n'y ait aucune équation d'omiſe; en ſecond lieu, que dans chaque combinaiſon particuliére, une des équations n'ait jamais été employée dans

dans une combinaison précédente, & que l'autre ait été mêlée auparavant dans quelque combinaison, horsmis la premiére paire. A-la-vérité, l'Algébriste peut s'écarter quelquefois de cette derniére règle; mais s'il s'y tient, il n'en fera que mieux.

PROBLEME 66.

95. *Trois hommes,* A, B *&* C *parloient de leur argent;* A *dit à* B *&* à C, *donnez-moi* e *de votre fonds, & j'aurai le double de ce que vous aurez laissé;* B *dit à* A *&* à C, *donnez-moi* e *de votre fonds, & j'aurai trois fois autant que vous aurez laissé;* C *dit à* A *&* à B, *donnez-moi* e *de votre fonds, & j'aurai quatre fois autant que vous aurez laissé: Combien avoit chacun d'eux?*

SOLUTION.

Désignez par a, b & c l'argent de A, de B & de C respectivement, & vous aurez ces trois équations fondamentales;

$$a+e=2b+2c-2e.$$
$$b+e=3a+3c-3e.$$
$$c+e=4a+4b-4e.$$

Ces équations préparées, seront;

Eq. 1. $a-2b-2c=-3e.$
Eq. 2. $3a-b+3c=\ 4e.$
Eq. 3. $4a+4b-c=\ 5e.$

Retranchez trois fois la premiére équation de la seconde, & vous aurez

Eq. 4. $*\ \ 5b+9c=13e.$

Retranchez quatre fois la premiére équation de la troisiéme, & vous aurez

Eq. 5. $*\ \ 12b+7c=17e.$

Retranchez cinq fois la cinquiéme équation de douze fois la quatriéme, & vous aurez

Eq. 6. $*\ \ *\ \ 73c=71e$; donc
Eq. 7. $*\ \ *\ \ c=\frac{71e}{73}.$

Substituez cette valeur de c dans la quatriéme équation, & vous aurez $5b+9c$, c'est-à-dire, $5b+\frac{639e}{73}=13e$; donc $365b+639e=949e$; & $365b=310e$, & $b=\frac{310e}{365}=\frac{62e}{73}$; donc

Eq.

$$\text{Eq. 8.}\quad * \quad b \quad * = \frac{62e}{73}.$$

Donc $b + c = \frac{133e}{73}$, & $2b + 2c = \frac{266e}{73}$, & $-2b - 2c = -\frac{266e}{73}$; ainsi en substituant $-\frac{266e}{73}$ à la place de $-2b - 2c$ dans la premiére équation, on aura $a - \frac{266e}{73} = -3e$; par conséquent $73a - 266e = -219e$; donc

$$\text{Eq. 9.}\quad a \quad * \quad * = \frac{47e}{73}.$$

Si bien qu'à la fin l'argent de *A* se trouve être $\frac{47e}{73}$, celui de *B* $\frac{62e}{73}$, & celui de *C* $\frac{71e}{73}$: faites $e = 73$, & l'argent de *A* sera 47, celui de *B* 62, & celui de *C* 71. C'est ce qui est bien clair: l'argent de *A* est 47, & celui de *B* & de *C* ensemble 133; ajoûtez 73 à 47 & l'argent de *A* sera 120, au-lieu qu'en ôtant 73 de 133, l'argent de *B* & de *C* sera 60; or $60 \times 2 = 120$: outre cela, l'argent de *B* est 62, & celui de *A* & de *C* ensemble 118; retranchez 63 de 118, & il restera à *A* & à *C* 45, au-lieu qu'en ajoûtant 63 à 62 l'argent de *B* sera 135; or $45 \times 3 = 135$: enfin, l'argent de *C* est 71, & la somme de celui de *B* & de *A* 109; retranchez 73 de 109, & ajoûtez ce même nombre à 71, & *C* aura 144, & *A* & *B* 36; or $36 \times 4 = 144$.

Eq. 1.	$a - 2b - 2c = -3e.$	Eq. 7.	$* \quad * \quad c = \frac{71e}{73}.$
2.	$3a - b + 3c = 4e.$		
3.	$4a + 4b - c = 5e.$	8.	$* \quad b \quad * = \frac{62e}{73}.$
4.	$* \quad 5b + 9c = 13e.$		
5.	$* \quad 12b + 7c = 17e.$	9.	$a \quad * \quad * = \frac{47e}{73}.$
6.	$* \quad * \quad 73c = 71e.$		

PROBLEME 67.

96. *On demande quatre nombres* a, b, c *&* d, *qui soient tels, que* a *augmenté de la moitié de la somme de tout le reste fasse* f; *que* b *augmenté d'un tiers de la somme de tout le reste fasse* f; *que* c *augmenté d'un quart de la somme de tout le reste fasse* f; *&* *que* d *augmenté d'un cinquiéme de la somme de tout le reste fasse* f.

SOLUTION.

Les équations fondamentales de ce problême sont

$$a + \frac{b + c + d}{2} = f. \qquad c + \frac{a + b + d}{4} = f.$$

$$b + \frac{a + c + d}{3} = f. \qquad d + \frac{a + b + c}{5} = f.$$

De



De ces équations dûment préparées se déduisent les équations suivantes ;

	Eq. 1.	$2a + b + c + d = 2f.$
	2.	$a + 3b + c + d = 3f.$
	3.	$a + b + 4c + d = 4f.$
	4.	$a + b + c + 5d = 5f.$
Deux fois la 2de — la premiére donnent	5.	$* \quad 5b + c + d = 4f.$
La 2de — la 3éme donne	6.	$* \quad 2b - 3c \quad * = -f.$
La 3éme — la 4éme donne	7.	$* \quad * \quad 3c - 4d = -f.$
Deux fois la 5éme — 5 fois la 6éme donnent	8.	$* \quad * \quad 17c + 2d = 13f.$
Trois fois la 8éme — 17 fois la 7éme donnent	9.	$* \quad * \quad * \quad 74d = 56f.$
Cette derniére donne	10.	$* \quad * \quad * \quad d = \frac{28f}{37}.$
La 7éme & la 10éme donnent	11.	$* \quad * \quad c \quad * = \frac{25f}{37}.$
La 6éme & la 11éme donnent	12.	$* \quad b \quad * \quad * = \frac{19f}{37}.$
La 1ére, 12éme, 11éme & 10éme donnent.	13.	$a \quad * \quad * \quad * = \frac{1f}{37}.$

Supposez $f = 37$, & les nombres a, b, c, d, se trouveront être 1, 19, 25, 28 respectivement.

PROBLEME 68.

97. *Quatre hommes*, A, B, C *&* D, *ayant chacun une différente somme d'argent, se mettent au jeu:* A *gagne à* B *la moitié de son argent*, B *gagne à* C *le tiers de son argent*, C *gagne à* D *le quart de son argent*, *&* D *gagne à* A *la cinquiéme partie de son argent ; après cela ils quittent le jeu, ayant chacun la même somme d'argent, savoir* g ; *laquelle quantité* g, *quoique connue, est supposée ne devoir être déterminée qu'après l'opération faite. On demande chacune des sommes d'argent avec lesquelles* A, B, C, D, *se sont mis au jeu ; je veux dire, rélativement à la quantité connue* g.

Ce problême est susceptible de différentes solutions ; voici celle que nous croyons convenir le mieux ici.

SOLUTION.

Que a, b, c, d, représentent les sommes inconnues respectives, avec lesquelles A, B, C & D se sont mis au jeu ; si A avoit perdu à D un cinquiéme de l'argent qu'il avoit d'abord, & n'avoit rien gagné à B, il auroit eu à la fin $\frac{a}{1} - \frac{a}{5}$ ou $\frac{4a}{5}$; mais suivant le problême, A perd un cinquiéme de son argent à D, & gagne d'un autre côté à B la moitié de son

 argent ;

argent; donc la derniére somme de A, après le jeu fini, étoit $\frac{4a}{5} + \frac{b}{2}$; mais le problême porte, qu'à la fin du jeu, la derniére somme de A étoit g; ce qui nous fournit cette équation, $\frac{4a}{5} + \frac{b}{2} = g$; donc $4a + \frac{5b}{2} = 5g$; par conséquent $8a + 5b = 10g$: de même, les deux premiéres conditions du problême fournissent cette autre équation, $\frac{b}{1} - \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = g$, ou $\frac{b}{2} + \frac{c}{3} = g$; cette équation, étant délivrée de ses fractions, comme la précédente, devient $3b + 2c = 6g$: la seconde & la troisiéme des conditions du problême fournissent cette équation, $\frac{c}{1} - \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = g$, ou $\frac{2c}{3} + \frac{d}{4} = g$, laquelle étant dégagée de ses fractions donne $8c + 3d = 12g$: enfin, la derniére & la premiére des conditions du problême, aussi considérées ensemble, fournissent cette équation, $\frac{3d}{4} + \frac{a}{5} = g$; qu'on peut changer en celle-ci, $15d + 4a$, ou $4a + 15d = 20g$; desorte que les équations fondamentales de ce problême, dégagées de leurs fractions, se trouveront être;

$$8a + 5b = 10g.$$
$$3b + 2c = 6g.$$
$$8c + 3d = 12g.$$
$$4a + 15d = 20g.$$

Il est manifeste que parmi ces équations il n'y en a que deux du premier rang, savoir, la premiére, $8a + 5b = 10g$, & la derniére, $4a + 15d = 20g$; la seconde équation fondamentale, savoir, $3b + 2c = 6g$ est une équation du second rang, & la troisiéme en ordre, $8c + 3d = 12g$ est une équation du troisiéme rang; c'est pourquoi dans la résolution de ce problême, ces équations fondamentales ne doivent pas être écrites toutes l'une sous l'autre, comme dans les exemples précédens, mais doivent être placées chacune dans leur propre rang, ainsi;

Eq. 1. $8a + 5b$ * * $= 10g$.
2. $4a$ * * $+ 15d = 20g$.

Or comme il n'y a point d'autres équations du premier rang que ces deux-là, voici de quelle maniére il faut s'y prendre en passant aux équations du second rang; suivant l'Art. 70, retranchez deux fois la seconde équation de la premiére, & il restera $5b - 30d = -30g$; donc divisant les deux membres de cette équation par 5; nous aurons $b - 6d = -6g$, pour une troisiéme équation.

Eq. 3. * b * $- 6d = -6g$.

Mais



Mais comme cette derniére équation est une équation du second rang, il convient présentement de faire usage de l'équation du second rang gardée jusqu'ici en réserve dans le problême, savoir $3b + 2c = 6g$, & de la placer sous les autres, ainsi :

$$\text{Eq. 4.} \quad * \quad 3b + 2c \quad * = 6g.$$

Retranchez à-présent trois fois la troisiéme équation de la quatriéme, c'est-à-dire, retranchez $* \; 3b \; * - 18d = -18g$ de $* \; 3b + 2c \; * = 6g$, & il restera $2c + 18d = 24g$; divisant le tout par 2, nous aurons

$$\text{Eq. 5.} \quad * \quad * \quad c + 9d = 12g.$$

Cette équation est du troisiéme rang : ainsi, il conviendra de faire usage de la derniére des équations fondamentales données dans le problême, qui est de même rang que celle-ci, & de la placer sous celle-ci comme une sixiéme équation, ainsi;

$$\text{Eq. 6.} \quad * \quad * \quad 8c + 3d = 12g.$$

Retranchez cette sixiéme équation de huit fois la cinquiéme, c'est-à-dire, $* * \; 8c + 3d = 12g$ de $* * \; 8c + 72d = 96g$, & il restera $69d = 84g$; divisant le tout par 3, nous aurons

$$\text{Eq. 7.} \quad * \quad * \quad * \quad 23d = 28g.$$

$$\text{Eq. 8.} \quad * \quad * \quad * \quad d = \frac{28g}{23}.$$

Substituez cette valeur à la place de d dans la cinquiéme équation, & au-lieu de $c + 9d = 12g$, vous aurez $c + \frac{252g}{23} = 12g$; par conséquent $23c + 252g = 276g$; & $23c = 24g$; &

$$\text{Eq. 9.} \quad * \quad * \quad c \quad * = \frac{24g}{23}.$$

Substituez la valeur de d, trouvée dans la huitiéme équation, à la place de d dans la troisiéme, où nous avions $b - 6d = -6g$, & vous aurez $b - \frac{168g}{23} = -6g$; donc $23b - 168g = -138g$; & $23b = 30g$; &

$$\text{Eq. 10.} \quad * \quad b \quad * \quad * = \frac{30g}{23}.$$

Substituez cette valeur de b dans la premiére équation, $8a + 5b = 10g$, & vous aurez $8a + \frac{150g}{23} = 10g$; par conséquent $184a + 150g = 230g$; donc $184a = 80g$, & $a = \frac{80g}{184} = \frac{10g}{23}$, donc nous avons

$$\text{Eq. 11.} \quad a \quad * \quad * \quad * = \frac{10g}{23}.$$

Desorte qu'à la fin toutes les quantités a, b, c, d, viennent à être connues

nues rélativement à la grandeur g; car $a=\frac{10g}{23}$, $b=\frac{30g}{23}$, $c=\frac{24g}{23}$, & $d=\frac{28g}{23}$: suppofez $g=23$, & les quantités fe trouveront toutes exprimées par des nombres entiers; $a=10$, $b=30$, $c=24$, & $d=28$; & elles fatisferont aux conditions du problême; car à ce compte

La derniére fomme de A fera $10-2+15=23$;
La derniére fomme de B fera $30-15+8=23$;
La derniére fomme de C fera $24-8+7=23$;
& La derniére fomme de D fera $28-7+2=23$;

Eq.					
1.	$8a$	$+5b$	*	*	$=10g$.
2.	$4a$	*	*	$+15d$	$=20g$.
3.	*	b	*	$-6d$	$=-6g$.
4.	*	$3b$	$+2c$	*	$=6g$.
5.	*	*	c	$+9d$	$=12g$.
6.	*	*	$8c$	$+3d$	$=12g$.
7.	*	*	*	$23d$	$=28g$.

Eq.					
8.	*	*	*	d	$=\frac{28g}{23}$.
9.	*	*	c	*	$=\frac{24g}{23}$.
10.	*	b	*	*	$=\frac{30g}{23}$.
11.	a	*	*	*	$=\frac{10g}{23}$.

La folution, que nous venons de donner ici, eft deftinée à inftruire le lecteur de la maniére dont il doit s'y prendre dans des cas où toutes fes équations fondamentales ne font pas du même rang; car autrement le problême eft fufceptible d'une folution bien plus élégante en n'y employant qu'une feule inconnue, comme nous le verrons, fi pour éviter les fractions, nous défignons par x l'argent que D a gagné de A. Voici quelle eft cette folution.

D gagne de A,	x;
Somme que A avoit d'abord,	$5x$;
Ce qui refte à A après ce que D lui a gagné,	$4x$;
A gagne à B,	$g-4x$;
Somme que B avoit d'abord,	$2g-8x$;
Ce qui refte à B après ce que A lui a gagné,	$g-4x$;
B gagne à C,	$4x$;
Somme que C avoit d'abord,	$12x$;
Ce qui refte à C après ce que B lui a gagné,	$8x$;
C gagne à D,	$g-8x$;
Somme que D avoit d'abord,	$4g-32x$;
Ce qui refte à D après ce que C lui a gagné,	$3g-24x$.

D a gagné de A, $24x-2g$; car le refte de l'argent de D, après ce qu'il a perdu à C étoit $3g-24x$, & par conféquent, fi D n'avoit rien gagné

gagné à *A*, la quantité $3g-24x$ auroit été la derniére somme de *D*; mais il paroît par le problême que cette derniére somme étoit g; ainsi l'argent que *D* a gagné de *A* doit être l'excès de g par dessus $3g-24x$; donc en retranchant $3g-24x$ de g, le reste $24x-2g$ sera l'argent que *D* a gagné de *A*; & c'est précisément de même que tous les autres gains ont été déterminés: nous avons donc ici deux expressions différentes pour déterminer l'argent que *D* a gagné de *A*, savoir x par la supposition, & $24x-2g$ par la nature du problême; donc $24x-2g=x$; & $x=\frac{2g}{23}$; après quoi la somme que chaque joueur a eue d'abord, se trouvera ainsi:

A.	$5x=\frac{10g}{23}$.	*C*.	$12x=\frac{24g}{23}$.
B.	$2g-8x=\frac{30g}{23}$.	*D*.	$4g-32x=\frac{28g}{23}$



ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE III.

Quelques observations destinées à faciliter l'intelligence de la règle pour l'extraction de la Racine quarrée.

ART. 98. JE me suis engagé ci-dessus à profiter de la première occasion pour expliquer la méthode ordinaire de tirer la racine quarrée, & cette occasion s'offre à présent: car, d'un côté, il n'y a pas moyen de resoudre les équations du second degré, dont nous allons traiter, sans l'extraction de la racine quarrée; & de l'autre, je suppose le jeune Analyste assez habile à présent pour me suivre avec moins de peine pour lui & peut-être aussi pour moi, qu'il n'auroit pu faire, si j'avois entamé ce sujet plutôt. Mais je ne dois pas oublier d'avertir ici mon Lecteur, que si un nombre entier, ou un nombre mixte composé d'un nombre entier & de quelques parties décimales, n'est pas un quarré, sa racine quarrée sera un nombre entier, plus une suite infinie de fractions décimales: mais s'il y a moyen de trouver une règle à l'aide de laquelle on puisse déterminer le nombre entier, cela suffit, à cause que toutes les parties de la racine quarrée d'un nombre quelconque peuvent être considérées comme formant un nombre entier, jusqu'à ce que l'opération soit faite, puisque ce n'est qu'alors qu'il est nécessaire d'ajoûter au nombre entier ses parties décimales. Voyez Introd. Art. 24.

Pour mieux effectuer ce que je me propose ici, je ferai part au Lecteur des observations suivantes, qui pourront lui être de grand usage pour l'intelligence de la démonstration que je vais donner; & s'il trouve, ou qu'il s'imagine trouver de la difficulté dans l'application de ces observations, le meilleur avis que je puisse lui donner ici, aussi-bien que dans plusieurs autres endroits de ce Livre, est qu'il lise & relise la démonstration: par ce moyen l'obscurité, dont elle lui avoit paru couverte d'abord, se dissipera peu à peu, & à la fin s'évanouira entiérement.

OBSERVATION I.

Si quelque nombre, comme $a+x$, composé de deux parties a & x, est élevé au quarré, le produit sera $aa+2ax+xx=aa+\overline{2a+x}\times x$.

OBSER-

OBSERVATION 2.

$1 \times 1 = 1$; de même $10 \times 10 = 100$, & $100 \times 100 = 10000$, & $1000 \times 1000 = 1000000$, &c. d'où j'infére, que si quelque nombre est composé d'un ou de deux caractéres, sa racine quarrée, ou du moins la partie de cette racine qui est un nombre entier, ne sera que d'un caractére; si un nombre est composé de trois ou de quatre caractéres, le nombre entier de sa racine sera de deux caractéres; si un nombre est composé de cinq ou six caractéres, le nombre entier de sa racine sera de trois caractéres, &c.: ainsi le nombre entier de la racine quarrée de ce nombre de cinq caractéres 56644, sera de trois caractéres; car ce nombre est entre 10000, dont la racine quarrée est 100, & entre 1000000, dont la racine quarrée est 1000; donc le nombre entier de la racine quarrée du nombre 56644 doit se trouver entre 100 & 1000, & consister par conséquent en trois caractéres.

OBSERVATION 3.

Il suit de l'observation précédente, que si à quelque nombre proposé on met un point au-dessus de la place des unités, & un autre point au-dessus de la place des centaines, & ainsi toujours de suite, en laissant une place vuide entre deux, le nombre des points marquera celui des caractéres, dont le nombre entier de la racine quarrée du nombre proposé sera composé: par exemple, si le nombre 56644 étoit marqué ainsi, nous aurions $\dot{5}6\dot{6}4\dot{4}$; & les trois points donneroient à connoître, que la racine quarrée de ce nombre, ou du moins le nombre entier de cette racine, est de trois caractéres.

OBSERVATION. 4.

Supposant tout comme dans la derniére observation, si quelque nombre est avancé d'un point, c'est-à-dire, de deux caractéres vers la gauche, en ajoûtant des zéros, ou en changeant quelques caractéres à la droite en les dépouillant de leur qualité de fractions décimales, & en les considérant comme des nombres ordinaires, les caractéres qui exprimeront la racine quarrée, seront les mêmes, avec cette différence seulement, que ces caractéres seront avancés chacun d'une place vers la gauche; si le nombre est avancé de deux points, c'est-à-dire, de quatre caractéres, la racine quarrée sera avancée de deux places; &c. par exemple, si la racine quarrée du nombre 576 est 24, celle du nombre 57600 sera 240, celle de 5760000 sera 2400, &c. par exemple encore,

re, si la racine quarrée du nombre 5.6644 est 2.38, la racine quarrée du nombre 566.44 sera 23.8, & celle du nombre 56644 sera 238, &c. Pour en être convaincu, & pour comprendre en même tems la raison de la chose, on n'a qu'à élever à la seconde puissance les nombres 2.38, 23.8, 238.

N. B. Elever un nombre au quarré, comme il a été dit ci-dessus, c'est le multiplier par lui-même.

Observation 5.

Il suit de la derniére observation, que si la racine quarrée de quelque nombre, par exemple, de 5.6644 se trouve entre 2 & 3, la racine quarrée de 566.44 se trouvera entre 20 & 30; & celle de 56644, entre 200 & 300 &c. par exemple encore, si la racine quarrée de 566.44 se trouve entre 23 & 24, la racine quarrée de 56644 sera entre 230 & 240: cela est manifeste; car supposons la racine quarrée de 566.44 égale à 23.8, en ce cas, par la derniére observation, la racine quarrée de 56644 sera 238; & comme le nombre 23.8 se trouve entre 23 & 24, de même celui de 238 se trouve entre 230 & 240.

Recherche d'une règle pour l'extraction de la Racine quarrée.

99. Ces observations étant faites, qu'on propose quelque nombre, tel que 56644; & voyons s'il n'y auroit pas moyen d'en découvrir la racine quarrée par un simple effort de raisonnement, sans emprunter aucun secours de la méthode ordinaire. Ce nombre étant donc marqué, comme il a été dit dans la troisiéme observation, je commencerai d'abord par le caractére 5, appartenant au premier point à la main gauche, sans avoir aucun égard aux caractéres suivans. Je dirai donc: le nombre 5 lui-même n'est pas un nombre quarré; c'est pourquoi j'en soustrais le nombre 4, qui est un nombre quarré, & il reste 1; & comme 2 est la racine quarrée de 4, j'en infére, que de toute la suite infinie représentant la racine quarrée du nombre 5, le premier terme, ou le nombre entier de cette racine est 2: d'ailleurs, comme le quarré de 2 forme, en nombre entier, un quarré immédiatement au-dessous de 5, qui lui-même n'est pas un nombre quarré, il s'ensuit que le quarré de 3 sera, en nombre entier, le quarré le plus proche immédiatement au-dessus de 5, & par conséquent que le quarré de 3, quel qu'il soit, ne sauroit être plus petit que 6; d'où j'infére ensuite, que le nombre 2 est le premier terme de la racine quarrée, non seulement du nombre 5, mais aussi de quelque autre nombre entre 5 & 6 au moins; ainsi

ainsi 2 sera le premier caractére de la racine quarrée du nombre 5 .66, aussi-bien que du nombre 5 .6644; donc par la quatriéme observation, 2 sera le premier caractére de la racine quarrée du nombre 56644; ce qui est déjà un grand point de gagné. Pour découvrir présentement le caractére suivant de la racine, je considére le nombre 566 en lui-même, sans avoir aucun égard aux autres caractéres. Il a déjà été prouvé, que le premier caractére de la racine quarrée de 5 .66 est 2; donc cette racine se trouve entre 2 & 3, & en conséquence de la cinquiéme observation, la racine quarrée du nombre 566 se trouve entre 20 & 30; que $20+x$ représente donc la partie de la racine quarrée de 566, qui est exprimable par un nombre entier, x étant un nombre entier du rang des unités: il est manifeste alors, que le quarré de $20+x$ doit être précisément égal à 566, si ce dernier nombre est un quarré parfait; ou bien le premier quarré en nombre entier au-dessous de 566; mais le quarré de $20+x$ est par la premiére observation $20 \times 20 + \overline{40+x} \times x$; donc $20 \times 20 + \overline{40+x} \times x$ est ou égal à 566, ou plus petit que ce nombre; retranchez le quarré de 20 des deux côtés, en remarquant, que comme auparavant, 2×2 étant retranchés de 5, il restoit 1, ainsi présentement 20×20 étant retranchés de 500, il doit rester 100, & qu'après avoir soustrait 400 de 566, il reste 166, ainsi $\overline{40+x} \times x$ doit être ou égal à 166 ou moindre, suivant que le nombre 566 est, ou n'est pas un quarré parfait; & par conséquent si $\overline{40+x} \times x$ est un nombre plus petit que 166, la différence sera l'excès du nombre 566 par-dessus le nombre quarré le plus proche de 566, & plus petit que ce nombre: on voit par-là, pour le dire un passant, que le nombre 166 doit être partagé en deux nombres, savoir x, & $40+x$, dont le produit doit être égal à 166, ou en approcher autant qu'il est possible: mais continuons; comme nous avons déjà prouvé que le produit $\overline{40+x} \times x$ ne doit pas surpasser 166, il s'ensuit que le produit $40x$ est moindre que 166, & par conséquent que x est plus petit que le quotient de 166 divisés par 40, ou que 16 .6 divisés par 4; mais le quotient de 16 .6 divisés par 4 se trouve entre les deux nombres entiers 4 & 5; donc x est plus petit que 5, & 4 est le plus grand nombre entier qu'on puisse supposer égal à x; supposons donc x égal à 4, & voyons ce qui en résultera; si $x=4$, nous aurons $\overline{40+x}=44$, & $40+x \times x = 44 \times 4 = 176$; donc la supposition de $x=4$ étoit fausse, à cause que $\overline{40+x} \times x$ ne doit pas surpasser 166; cela étant, faisons $x=3$, & nous aurons $40+x=43$, & $\overline{40+x} \times x = 43 \times 3 = 129$, nombre plus petit que 166, & qui par cela même n'a rien d'op-

d'opposé aux conditions marquées ci-dessus; & puisque x doit être fait égal au plus grand nombre entier, que les conditions précédentes pourront admettre, x doit être égal à 3, & par conséquent $20+x$, ou la partie la plus prochaine, & exprimable en nombre entier, de la racine quarrée du nombre 566 est 23; & puisque $\overline{40+x}\times x$ ou 129, retranchés de 166, laissent 37, il s'ensuit que 23×23 étant soustraits de 566, il doit rester aussi 37: outre cela, comme le quarré de 23 est le nombre quarré immédiatement au-dessous de 566, qui n'est pas un nombre quarré, il faut que le quarré de 24 soit plus grand que 566, & par conséquent pas plus petit que 567; c'est pourquoi la racine quarrée du nombre 566.44 doit nécessairement se trouver entre 23 & 24; donc par la cinquiéme observation, la racine quarrée du nombre 56644 doit être entre 230 & 240, ce qui est un nouveau pas en fait d'approximation: supposons présentement que $230+x$ est la racine quarrée, ou le nombre entier de la racine quarrée du nombre 56644; en ce cas la premiére observation nous donnera $230\times 230+\overline{460+x}\times x=56644$, ou moindres que ce nombre: retranchez 230×230 des deux côtés, en observant, que comme auparavant 23×23 étant retranchés de 566, il restoit 37, de même à présent 230×230 étant soustraits de 56600, il doit rester 3700; & qu'en retranchant ce même quarré de 56644, il doit rester 3744; donc $\overline{460+x}\times x$ ne sauroient surpasser 3744, & le nombre $460x$ est plus petit que 3744; de plus x doit être plus petit que le quotient de 3744 divisés par 460; mais le quotient de 3744 divisés par 460, ou (ce qui revient à peu près au même, surtout rélativement au nombre entier de la racine) le quotient de 374 divisés par 46 se trouve entre les deux nombres entiers 8 & 9; donc 8 est le plus grand nombre entier qu'on puisse supposer égal à x: supposons donc $x=8$, & nous aurons $\overline{460+x}=468$, & $\overline{460+x}\times x=468\times 8=3744$, ce qui s'accorde avec les conditions indiquées ci-dessus: ainsi le nombre 238 est exactement la racine quarrée du nombre proposé 56644. C. Q. F. T.

Celui qui voudra se donner la peine d'extraire la racine quarrée de ce même nombre 56644 en suivant la méthode ordinaire, s'appercevra aisément que cette méthode est fondée sur ce qui vient d'être démontré.

Fondement de la règle ordinaire pour l'extraction de la Racine cubique.

100. Le cube de $\overline{a+x}$ est $a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$; faites $\overline{3a+x}=b$; puis multipliant les deux membres de cette équation par x, vous aurez $3ax+xx=bx$, & $3a^2+3ax+xx=3a^2+bx$; & $3a^2x+3ax^2+x^3$ =

$= \overline{3a^2 + bx} \times x$; donc le cube de $a + x$ eſt $a^3 + \overline{3a^2 + bx} \times x$: ceci répond à la premiére obſervation dans le penultiéme Article, & ſert de fondement à la règle pour l'extraction de la racine cubique; & quiconque appliquera les raiſonnemens des deux derniers Articles au cas préſent, ſera capable de ſe former à lui-même une règle pour l'extraction de la racine cubique, ou du moins pourra mieux comprendre la règle ordinaire, telle qu'elle ſe trouve dans les Livres d'Arithmétique.

N. B. La principale difficulté qu'on rencontre dans l'extraction de la racine quarrée ou cubique, conſiſte à trouver les deux premiers caractéres de la racine, & à leur égard il faut quelquefois y aller en tâtonnant; le reſte de l'opération eſt plus ſûr.

De la compoſition & de la réſolution d'un Quarré, qui a un binome pour racine.

101. Juſqu'ici nous ne nous ſommes principalement arrêtés qu'à des équations ſimples, & il eſt plus que tems que nous paſſions à celles du ſecond degré. Mais avant que d'en venir-là, il faut néceſſairement dire quelque choſe de la nature d'un binome.

Un binome (en prenant ce mot dans le ſens que nous y attachons ici) eſt une quantité compoſée de deux parties jointes enſemble par le ſigne $+$ ou $-$, comme $x + a$, $x - a$, $x + \frac{b}{2}$, $x - \frac{b}{2}$, & un quarré, qui a pour racine un binome, n'eſt autre choſe que le quarré d'une pareille quantité: ainſi le quarré de $x + \frac{b}{2}$ eſt $xx + bx + \frac{bb}{4}$, & celui de $x - \frac{b}{2}$ eſt $xx - bx + \frac{bb}{4}$.

$$\begin{array}{ll} x + \frac{b}{2} & x - \frac{b}{2} \\ x + \frac{b}{2} & x - \frac{b}{2} \\ \hline x^2 + \frac{bx}{2} + \frac{bb}{4} & x^2 - \frac{bx}{2} + \frac{bb}{4} \\ \quad + \frac{bx}{2} & \quad - \frac{bx}{2} \\ \hline x^2 + \frac{2bx}{2} + \frac{bb}{4}; \text{c'eſt-à-dire } x^2 + bx + \frac{bb}{4}. & x^2 - \frac{2bx}{2} + \frac{bb}{4}; \text{c'eſt-à-dire } x^2 - bx + \frac{bb}{4}. \end{array}$$

La différence entre ces deux quarrés naît de la différence du ſigne qui eſt au devant de b; & cette différence n'affecte que le ſecond membre; car le troiſiéme membre $\frac{bb}{4}$, ſera le même, que b ſoit une grandeur affirma-

affirmative ou négative; c'est pourquoi, en réunissant ces deux cas en une seule formule, on aura: *Le quarré de* $x \pm \frac{b}{2}$ *est* $xx \pm bx + \frac{bb}{4}$; *savoir*, $+bx$ *quand la racine est* $x + \frac{b}{2}$, & $-bx$ *quand la racine est* $x - \frac{b}{2}$. Or des trois membres qui composent ce quarré, le premier xx est le quarré de x; le second $\pm bx$ est la racine de ce quarré multipliée par le coëfficient $\pm b$; car la racine de xx est x, & $x \times \pm b = \pm bx$; le troisiéme & dernier terme $\frac{bb}{4}$ est le quarré de $\pm \frac{b}{2}$, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient du second terme; d'où nous déduisons les deux observations suivantes.

Observation I.

Toutes les fois que nous rencontrons une quantité composée de deux termes, comme $xx \pm bx$, *dont l'une, comme* xx, *est un quarré, & l'autre* $\pm bx$ *est la racine de ce quarré multipliée par quelque coëfficient donné* $\pm b$; *toutes les fois, dis-je, que nous rencontrons une pareille quantité, nous pouvons la considérer comme un quarré imparfait, qui, s'il étoit complet, auroit pour racine un binome, mais qu'on peut aisément rendre complet par l'addition de* $\frac{bb}{4}$, *c'est-à-dire, par l'addition du quarré de la moitié du coëfficient du second terme:* ainsi $xx + 6x$ étant rendu complet, devient $xx + 6x + 9$; $xx - 8x$ devient $xx - 8x + 16$; $xx + 3x$ devient $xx + 3x + \frac{9}{4}$: de plus, $xx + \frac{2x}{3}$ devient $xx + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$; car le second terme est ici $\frac{2x}{3}$, & par conséquent le coëfficient de x est $\frac{2}{3}$ par l'Art. 70.; mais la moitié de $\frac{2}{3}$ est $\frac{1}{3}$, & le quarré de cette derniére fraction est $\frac{1}{9}$: pareillement $xx - \frac{5x}{6}$, quand on l'a rendu complet, devient $xx - \frac{5x}{6} + \frac{25}{144}$; car ici le coëfficient est $-\frac{5}{6}$, dont la moitié est $-\frac{5}{12}$, & le quarré de cette moitié est $\frac{25}{144}$: enfin, $xx - \frac{bx}{a}$ devient $xx - \frac{bx}{a} + \frac{bb}{4aa}$; car ici le coëfficient est $-\frac{b}{a}$, sa moitié $-\frac{b}{2a}$, & le quarré de cette moitié $\frac{bb}{4aa}$.

Obser-

OBSERVATION 2.

Nous observons en second lieu, que la racine d'un tel quarré rendu complet, c'est-à-dire, la racine de $xx \pm bx + \frac{bb}{4}$, *sera toujours* $x \pm \frac{b}{2}$, *c'est-à-dire, la racine quarrée du premier terme, plus la moitié du coëfficient du second terme:* ainsi la racine quarrée de $xx+6x+9$, sera $x+3$; celle de $xx-8x+16$ sera $x-4$; celle de $xx-3x+\frac{9}{4}$ sera $x+\frac{3}{2}$; celle de $xx+\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$ sera $x+\frac{1}{3}$; celle de $xx-\frac{5x}{6}+\frac{25}{144}$ sera $x-\frac{5}{12}$; & enfin celle de $xx-\frac{bx}{a}+\frac{bb}{4aa}$ sera $x-\frac{b}{2a}$.

Formule à laquelle toutes les Equations du second degré doivent être réduites pour les résoudre.

102. Comme une équation affectée du second degré, telle que nous l'avons définie ci-dessus, (Art. 23.) est une équation composée de trois différentes sortes de quantités; une sorte où le quarré de la quantité inconnue se trouve mêlé; une autre sorte où la quantité inconnue n'est point multipliée par elle-même; & une troisiéme sorte où l'inconnue ne se trouve point du tout; il s'ensuit, que toutes les équations du second degré, quelles qu'elles puissent être, sont réductibles à la formule $Axx = Bx + C$, dans laquelle A, B & C désignent des nombres entiers connus, affirmatifs ou négatifs, & x la quantité inconnue, le signe $+$ qui se trouve dans le second membre de l'équation $Bx + C$, ne signifiant autre chose sinon que les deux quantités Bx & C doivent être ajoûtées ensemble suivant les régles ordinaires de l'addition, soit qu'elles soient toutes deux affirmatives, ou toutes deux négatives, ou l'une affirmative, & l'autre négative; c'est ce qu'on ne sauroit révoquer en doute, si l'on considére, que les équations du second degré peuvent, comme toutes les autres, être dégagées de fractions, de la même maniére que cela se pratique à l'égard des équations simples; & dès que cela est fait, il ne faut, tout au plus, qu'une transposition de termes, pour les réduire à la formule indiquée ci-dessus: cependant nous ne laisserons pas de donner quelques exemples de la réduction des équations du second degré à cette formule parmi celles que nous aurons occasion de proposer.

Théorême général pour résoudre toutes les Equations du second degré.

103. Supposons présentement qu'il soit question de résoudre quelque équation générale du second degré, avec laquelle toutes les équations par-

particuliéres du même degré pourront être comparées dans la suite, ce qui en facilitera la solution; comme par exemple, soit proposée l'équation générale de l'Article précédent, savoir, $Axx = Bx + C$, & qu'on veuille trouver la valeur ou les valeurs de x dans cette équation: en transposant Bx, j'aurai $Axx - Bx = C$; puis divisant les deux membres par A, afin de délivrer xx (qui est la plus haute puissance de x) de son coëfficient, il viendra $xx - \frac{Bx}{A} = \frac{C}{A}$; après cela, je considére le premier membre $xx - \frac{Bx}{A}$, comme un quarré imparfait, qui, s'il étoit complet, auroit pour racine un binome: j'ajoûte donc ce qui y manque, conformément à l'Art. 101, savoir, $\frac{BB}{4AA}$, c'est-à-dire, le quarré de la moitié du coëfficient du second terme; mais si $\frac{BB}{4AA}$ doit être ajoûté au premier membre pour rendre le quarré complet, il faut aussi l'ajoûter à l'autre membre pour conserver l'égalité: cette addition étant faite, l'équation sera $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{BB}{4AA} = \frac{BB}{4AA} + \frac{C}{A}$; mais les deux fractions $\frac{BB}{4AA}$ & $\frac{C}{A}$ peuvent se réduire à une seule $\frac{ABB + 4AAC}{4AAA}$, laquelle étant divisée par A, donnera $\frac{BB + 4AC}{4AA}$; donc $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{4AA}{BB} = \frac{BB + 4AC}{4AA}$; donc la racine quarrée d'un des membres sera égal à la racine quarrée de l'autre; mais la racine quarrée de la fraction $\frac{BB + 4AC}{4AA}$; au moins telle qu'elle est exprimée ici en lettres, ne sauroit s'extraire; car si, d'un côté, la grandeur $4AA$ est un quarré de l'autre, il n'y a aucune grandeur litérale, qui, multipliée par elle-même, puisse produire $BB + 4AC$; ainsi pour donner à ce numérateur la forme d'un quarré, supposons $BB + 4AC = ss$; & l'équation se trouvera alors être $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{BB}{4AA} = \frac{ss}{4AA}$; mais la racine quarrée de $xx - \frac{Bx}{A} + \frac{BB}{4AA}$ est $x - \frac{B}{2A}$, par l'Art. 101; & la racine quarrée de $\frac{ss}{4AA}$ est $\pm \frac{s}{2A}$ par une raison indiquée ci-dessus, savoir, que la grandeur $\frac{-s}{2A}$ multipliée par elle-même produira $\frac{+ss}{4AA}$, aussi bien que si cette multiplication eût eu lieu à l'égard de $\frac{+s}{2A}$; d'où il s'ensuit, par la définition même de la racine quarrée, que la premiére de ces quantités n'est pas moins une racine quarrée de $\frac{ss}{4AA}$ que la derniére; cela étant, cette équa-

équation ſe trouve réduite à une autre plus ſimple, ſavoir, $x - \frac{B}{2A} = \pm \frac{s}{2A}$; donc $x = \frac{B \pm s}{2A}$; c'eſt-à-dire, $x = \frac{B + s}{2A}$, & $x = \frac{B - s}{2A}$ C. Q. F. T.

Il paroît par-là que toute équation du ſecond degré a néceſſairement deux nombres, ou deux racines (comme on les appelle) qui répondent également à la condition de l'équation; c'eſt-à-dire, qui, en ſuppoſant celle de ces racines qu'on voudra $= x$, rendra les deux membres de l'équation égaux l'un à l'autre; & ces deux racines, dans tous les Arts & dans toutes les Sciences où des équations du ſecond degré ſont employées, ſont également bonnes, qu'elles ſoient affirmatives ou négatives, ou que l'une ſoit affirmative, ou l'autre négative: comme par exemple, en Géométrie, ſi l'on conſidére comme affirmative une ligne menée d'un point vers la droite, une ligne, menée du même point vers la gauche, devra être conſidérée comme négative; car ſuppoſant que du point A, qui eſt vers la gauche, on méne au point B vers la droite la ligne AB, & qu'on conçoive enſuite que le point B ſe meut vers A; il eſt clair ici, que plus B approche de A, plus la ligne affirmative AB ira en diminuant; quand le point B coïncidera avec A, la ligne AB devra être conſidérée comme égale à zéro, & par conſéquent, quand le point B, en continuant à ſe mouvoir, ſe trouvera au-delà du point A, & à la gauche de ce point, la ligne AB deviendra négative, & cependant une pareille ligne eſt auſſi réelle qu'aucune ligne affirmative que ce ſoit: la même remarque eſt applicable à toutes les autres Sciences, où des équations du ſecond degré ſont employées: mais dans le train ordinaire de la vie, où des quantités négatives n'ont point lieu, les racines affirmatives des équations du ſecond degré ſont ſeules admiſes dans la ſolution des problêmes, les racines négatives en étant exclues la plupart du tems.

N. B. 1. La racine de quelque quantité, ſoit en nombres ou en lettres, qu'on ne ſauroit exprimer, s'appelle une racine ſourde: telle eſt par exemple, $\sqrt{3}$, de même que $\sqrt{BB + 4AC} = s$, ou, ce qui revient au même, $BB + 4AC = ss$.

2. La grandeur C, & par cela même la grandeur $4AC$ ſera quelquefois négative: en ce cas ss, ou $BB + 4AC$ ſera la ſomme de la quantité affirmative BB & de la quantité négative $4AC$, ajoûtées enſemble ſuivant les régles ordinaires de l'addition.

3. Dans pluſieurs des exemples ſuivans, le Lecteur fera bien d'avoir devant les yeux les régles données ci-deſſus au ſujet des quantités négatives: par exemple, ſi x, c'eſt-à-dire $+x = -3$, il doit faire $4x$, ou

ou $4\times-3=-12$; mais il doit faire $-4x$, ou $-4\times-3=+12$; de-même $-x$, ou $-1x$, ou -1×-3 eſt égal à 3, &c.

Démonſtration ſynthétique du Théorême précédent.

104. On a démontré analytiquement dans le dernier Article, que ſi Axx eſt égal à $Bx+C$, x doit néceſſairement être égal à $\frac{B+s}{2A}$, & à $\frac{B-s}{2A}$, dans la ſuppoſition que ss eſt égal à $BB+4AC$. Pour obliger les jeunes Algébriſtes, qui ont quelque génie, j'ai deſſein de prouver le même théorême ſynthétiquement, c'eſt-à-dire, de faire voir, que ſi x eſt fait égal à $\frac{B+s}{2A}$, ou à $\frac{B-s}{2A}$, en ce cas Axx doit néceſſairement être égal à $Bx+C$.

PREMIER CAS.

Soit $x=\frac{B+s}{2A}$; donc $xx=\frac{BB+2Bs+ss}{4AA}$; multipliez les deux membres par A, & vous aurez Axx (ou un des membres de l'équation générale) égal à $\frac{BB+2Bs+ss}{4A}$; car une fraction peut ſe multiplier auſſi bien par la diviſion du dénominateur que par la multiplication du numérateur: de plus, puiſque $x=\frac{B+s}{2A}$, on a $Bx=\frac{BB+Bs}{2A}$; en doublant tant le numérateur que le dénominateur de cette derniére fraction, ce qui n'en change pas la valeur, il vient $Bx=\frac{2BB+2Bs}{4A}$; donc $Bx+C=\frac{2BB+2Bs}{4A}+\frac{C}{1}=\frac{2BB+2Bs+4AC}{4A}=\frac{BB+2Bs+BB+4AC}{4A}$ $=\frac{BB+2Bs+ss}{4A}$ à cauſe que $BB+4AC=ss$ par l'hypothéſe; donc $Axx=Bx+C$, puiſque chaque membre de l'équation eſt égal à la même quantité $\frac{BB+2Bs+ss}{4A}$.

SECOND CAS.

Soit préſentement $x=\frac{B-s}{2A}$, & nous aurons $xx=\frac{BB-2Bs+ss}{4AA}$, & Axx (ou le premier membre de l'équation générale) $=\frac{BB-2Bs+ss}{4A}$: de plus $Bx=\frac{BB-Bs}{2A}=\frac{2BB-2Bs}{4A}$; donc $Bx+C=\frac{2BB-2Bs+4AC}{4A}$

=

$=\frac{BB-2Bs+ss}{4A}$; donc $Axx=Bx+C$, à cause que chaque membre est égal à la même grandeur $\frac{BB-2Bs+ss}{4A}$.

Divers exemples de la solution des Equations affectées du second degré, tant par le moyen du théorême général, qu'indépendamment de ce théorême.

EXEMPLE I.

105. Soit l'équation qu'on propose à résoudre $6xx=5x-1$. Cette équation particuliére peut, de-même que celles qui suivent, se résoudre précisément de la même maniére que l'équation générale de l'Art. 103; mais comme ces sortes de solutions sont souvent accompagnées de fractions qui embarrassent les commençans, & que ces équations particuliéres ne sont que des cas particuliers de l'équation générale, il s'ensuit que la solution des premiéres doit être contenue dans celle de l'équation générale, & par conséquent, que pour les résoudre avec plus de facilité, il faut les rapporter à cette équation: cependant, pour la satisfaction du Lecteur, je résoudrai quelques-unes de ces équations en partie par le moyen du théorême général, & en partie indépendamment de ce théorême; & je commencerai par résoudre l'équation proposée à l'aide du théorême général, de la maniére suivante. Dans l'équation générale, Art. 103, nous avons $Axx=Bx+C$; dans l'équation particuliére déja proposée, nous avons $6xx=5x-1$; donc A dans l'équation générale répond à 6 dans l'équation particuliére, B répond à 5, & C à -1; cela étant, si l'on rapporte l'équation particuliére à l'équation générale, voici quelle en sera la solution: $A=6$, $B=5$, $C=-1$, $BB=25$, $4AC=-24$; donc ss, ou $BB+4AC$ sera la somme de 25 & $-24=1$; donc $s=1$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{5+1}{12}=\frac{1}{2}$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{5-1}{12}=\frac{1}{3}$; ainsi les deux racines de cette équation $6xx=5x-1$ sont $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$. La solution de cette équation en nombres sans le secours du théorême général, peut se trouver ainsi. Equation $6xx=5x-1$; donc $6xx-5x=-1$, & $xx-\frac{5x}{6}=-\frac{1}{6}$; où $xx-\frac{5x}{6}$ peut être considéré comme formant les deux premiers termes d'un quarré, qui a pour racine un binome; le coëfficient du second terme est $\frac{-5}{6}$, sa moitié $\frac{-5}{12}$, & le quarré de cette moitié $\frac{+25}{12\times 12}$: expression que je préfére à celle de $\frac{+25}{144}$ par une raison dont on s'appercevra bientôt: ajoûtez présentement $\frac{25}{12\times 12}$ des deux

côtés, c'est-à-dire, à un des membres pour rendre le quarré complet, & à l'autre pour conserver l'égalité, & vous aurez $xx - \frac{5x}{6} + \frac{25}{12 \times 12} = \frac{-1}{6} + \frac{25}{12 \times 12}$; il est manifeste ici que les fractions $\frac{-1}{6}$ & $\frac{+25}{12 \times 12}$ doivent être réduites au même dénominateur, afin de pouvoir les ajoûter mieux en une même somme; mais si cette opération se fait suivant la méthode ordinaire, il sera impossible d'avoir la racine quarrée de cette somme sans avoir besoin d'une autre réduction: ainsi pour l'éviter, je recherche par quel nombre le dénominateur 6 doit être multiplié pour faire 12×12, qui est le même que l'autre dénominateur; & la réponse dans ce cas, comme dans tous les autres de ce genre, sera très-facile; car $2 \times 6 = 12$, & par conséquent $12 \times 2 \times 6$, ou $24 \times 6 = 12 \times 12$; c'est pourquoi je multiplie tant le numérateur que le dénominateur de la fraction $\frac{-1}{6}$ par 24, & j'ai $\frac{-24}{12 \times 12}$; & cette fraction ajoûtée à l'autre fraction $\frac{+25}{12 \times 12}$ me donne $\frac{+1}{12 \times 12}$; après quoi l'équation devient $xx - \frac{5x}{6} + \frac{25}{12 \times 12} = \frac{1}{12 \times 12}$; tirez la racine quarrée de chacun des membres, & vous aurez $x - \frac{5}{12} = \pm \frac{1}{12}$: donc $x = \frac{5 \pm 1}{12} = \frac{1}{2}$; mais $\frac{5 - 1}{12} = \frac{1}{3}$; par conséquent $x = \frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$.

La même chose peut se prouver synthétiquement ainsi: soit $x = \frac{1}{2}$; en ce cas $xx = \frac{1}{4}$, & $6xx = \frac{6}{4}$ ou $1\frac{1}{2}$: de plus, $5x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; donc $5x - 1 = 1\frac{1}{2}$; donc $6xx = 5x - 1$, puisque chacune de ces grandeurs en particulier $= 1\frac{1}{2}$.

Supposons présentement $x = \frac{1}{3}$, & nous aurons $xx = \frac{1}{9}$, & $6xx = \frac{6}{9}$, ou $\frac{2}{3}$; d'un autre côté nous aurons $5x = \frac{5}{3}$ ou $1\frac{2}{3}$; ainsi $5x - 1 = \frac{2}{3}$; donc $6xx = 5x - 1$: d'où il suit que ces deux fractions satisfont à la condition de l'équation, & parmi tous les autres nombres entiers ou rompus, il n'y a qu'elles seules qui y satisfassent.

EXEMPLE 2.

On demande la solution de l'équation $24x - 2xx = xx + 45$. Transposant d'abord $-2xx$, nous avons $3xx + 45 = 24x$; ce qui donne $3xx = 24x - 45$, & réduit l'équation proposée à la forme de l'équation générale de l'Art. 102; c'est pourquoi appliquant l'équation générale à cette équation particuliére, nous aurons en conséquence de l'Art. 103: $A = 3$, $B = 24$, $C = -45$, $BB = 576$, $4AC = -540$, $ss = 576 - 540 = 36$, $s = 6$, $\frac{B + s}{2A} = 5$, $\frac{B - s}{2A} = 3$; donc $x = 5$ ou 3; & la chose paroîtra manifeste-

ment

ment par la substitution de 5 ou de 3 dans l'équation originale: cette substitution donnera, si $x=5$, $24x=120$; $xx=25$; donc $24x-2xx=120-50=70$; qui est un des membres de l'équation; d'un autre côté nous avons $xx+45=25+45=70$; par conséquent $24x-2xx=xx+45$. Soit x à-présent $=3$, nous aurons dans cette supposition $24x=72$, & $xx=9$, & $24x-2xx=54$: d'un autre côté, $xx+45=54$; donc $24x-2xx=xx+45$.

N. B. Cette dernière équation, après avoir été réduite à la formule de l'équation générale de l'Art. 102, étoit $3xx=24x-45$; mais cette équation auroit pu avoir été réduite à une autre plus simple de la même formule en divisant le tout par 3, & en ce cas l'équation auroit été $xx=8x-15$, cela étant nous aurions $A=1$, $B=8$, $C=-15$, $BB=64$, $4AC=-60$, $ss=4$, $s=2$, $\frac{B+s}{2A}=5$, $\frac{B-s}{2A}=3$, comme ci-dessus; en se servant de la méthode ordinaire on auroit eu la solution suivante; $xx-8x=-15$; donc en rendant le quarré complet, $xx-8x+16=1$; tirant la racine quarrée $x-4=\pm 1$; donc $x=+4\pm 1=5$ ou 3.

Exemple 3.

On propose à résoudre l'équation $72x-2xx+144=3xx-8x+444$. En transposant nous aurons $72x+144=5xx-8x+444$, & $80x+144=5xx+444$, & $5xx=80x-300$, & $xx=16x-60$; en résolvant cette équation comme celle du dernier exemple, nous trouverons $x=10$, ou 6; & pour s'en convaincre, on n'a qu'à substituer 10 ou 6 à la place de x dans l'équation originale.

Exemple 4.

Soit proposée à résoudre l'équation $28x-xx=115$. Nous avons ici $xx+115=28x$, & $xx=28x-115$: en résolvant cette équation comme celle du second exemple, on a $x=23$ ou 5.

Exemple 5.

On demande les racines de l'équation $\frac{120}{x}-5=\frac{120}{x+4}$. En multipliant les deux membres par x nous aurons $120-5x=\frac{120x}{x+4}$; donc $100x-5xx+480=120x$; donc $5xx+120x=100x+480$; donc $5xx=-20x+480$; donc (en divisant toute l'équation par 5) $xx=-4x+96$; donc dans ce cas, $A=1$, $B=-4$, $C=96$, $BB=16$, $4AC=384$,

$ss=16+384=400$, $s=20$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{-4+20}{2}=8$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{-4-20}{2}=-12$; donc l'équation, $x=8$, ou -12: en voici la preuve; soit $x=+8$; alors $\frac{120}{x}=15$, & $\frac{120}{x}-5=10$: de plus, $x+4=12$, & $\frac{120}{x+4}=10$; donc $\frac{120}{x}-5=\frac{120}{x+4}$. Soit présentement $x=-12$, & nous aurons $\frac{120}{x}=-10$; donc $\frac{120}{x}-5=-10-5=-15$: d'un autre côté, $x+4=-12+4=-8$; par conséquent $\frac{120}{x+4}=\frac{120}{-8}=-15$; donc $\frac{120}{x}-5=\frac{120}{x+4}$. Pour trouver la solution par la méthode ordinaire, on auroit dit; $xx=-4x+96$; donc $xx+4x=96$; donc $xx+4x+4=100$; donc $x+2=\pm 10$; donc $x=-2\pm 10=8$ ou -12.

EXEMPLE 6.

Soit proposée à résoudre l'équation $2xx+3x=65$; donc $2xx=-3x+65$; par conséquent en ce cas, $A=2$, $B=-3$, $C=65$, $BB=9$, $4AC=520$, $ss=529$, $s=23$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{-3+23}{4}=5$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{-3-23}{4}=-6\frac{1}{2}$: ainsi dans cette équation, $x=+5$, ou $-6\frac{1}{2}$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à substituer ces valeurs de x à la place de cette inconnue dans l'équation proposée. Supposons donc $x=-6\frac{1}{2}=\frac{-13}{2}$ donc $xx=\frac{+169}{4}$; donc $2xx=\frac{169}{2}$, & $+3x=+3\times\frac{-13}{2}=\frac{-39}{2}$; par conséquent $2xx+3x=\frac{169-39}{2}=\frac{130}{2}=65$. Pour avoir la solution en nombres, je dis, $2xx+3x=65$; donc $xx+\frac{3x}{2}+\frac{9}{4\times4}=\frac{65}{2}+\frac{9}{4\times4}=\frac{520+9}{4\times4}=\frac{529}{4\times4}$; donc $x+\frac{3}{4}=\pm\frac{23}{4}$; donc $x=\frac{-3\pm 23}{4}=+5$, ou $-6\frac{1}{2}$.

EXEMPLE 7.

On demande la valeur des racines de l'équation $9xx-x=140$; donc $9xx=1x+140$. Ici $A=9$, $B=1$, $C=140$, $BB=1$, $4AC=5040$, $ss=5041$, $s=71$, $\frac{B+s}{2A}=4$, $\frac{B-s}{2A}=-3\frac{8}{9}$; donc $x=+4$, ou $-3\frac{8}{9}$: le dernier cas peut se démontrer ainsi; $x=-3\frac{8}{9}=\frac{-35}{9}$; donc $xx=\frac{+1225}{81}$; & $9xx=\frac{1225}{9}$: de plus, $-1x$, c'est-à-dire, $-1\times\frac{-35}{9}=\frac{+35}{9}$;

par-

par conséquent $9xx - x = \frac{1225 + 35}{9} = \frac{1260}{9} = 140$. En nombres, le calcul doit se faire ainsi ; $9xx - 1x = 140$; donc $xx - \frac{1x}{9} = \frac{140}{9}$; par conséquent $xx - \frac{1x}{9} + \frac{1}{18 \times 18} = \frac{140}{9} + \frac{1}{18 \times 18} = \frac{5040 + 1}{18 \times 18} = \frac{5041}{18 \times 18}$; tirez la racine quarrée des deux membres de l'équation, c'est-à-dire, de $xx - \frac{1x}{9} + \frac{1}{18 \times 18}$ d'un côté, & de $\frac{5041}{18 \times 18}$ de l'autre, & vous aurez $x - \frac{1}{18} = \pm \frac{71}{18}$; ainsi $x = +4$, ou $-3\frac{8}{9}$.

EXEMPLE 8.

Soit proposée l'équation $\frac{45}{2x+3} + \frac{116}{4x+5} = 7$; donc $45 + \frac{232x + 348}{4x+5} = 14x + 21$; par conséquent $180x + 225 + 232x + 348 = 56xx + 154x + 105$; c'est-à-dire, $412x + 573 = 56xx + 154x + 105$; donc $258x + 573 = 56xx + 105$; donc $56xx = 258x + 468$; divisant l'équation par 2, nous aurons $28xx = 129x + 234$: en comparant cette équation avec l'équation générale de l'Art. 103, il en résultera, $A = 28$, $B = 129$, $C = 234$, $BB = 16641$, $4AC = 26208$, $ss = 42849$, $s = 207$, $\frac{B+s}{2A} = 6$, $\frac{B-s}{2A} = -1\frac{11}{28}$; ainsi dans cette équation $x = +6$, ou $-1\frac{11}{28}$. Voici comment je démontre l'un & l'autre cas.

Premiérement $x = 6$. Donc $2x + 3 = 15$; & $\frac{45}{2x+3} = 3$: de plus, $4x + 5 = 29$; donc $\frac{116}{4x+5} = 4$; par conséquent $\frac{45}{2x+3} + \frac{116}{4x+5} = 3 + 4 = 7$.

Secondement $x = -1\frac{11}{28} = -\frac{39}{28}$; donc $2x = \frac{-39}{14}$; donc $2x + 3 = \frac{-39}{14} + \frac{3}{1} = \frac{3}{14}$; ainsi $\frac{45}{2x+3}$ est le quotient de $\frac{45}{1}$ divisés par $\frac{3}{14}$; mais ce quotient, suivant les régles de la division des fractions, est $\frac{630}{3} = 210$; par conséquent $\frac{45}{2x+3} = 210$: de plus, $4x = \frac{-39}{7}$; donc $4x + 5 = \frac{-39}{7} + \frac{5}{1} = \frac{-4}{7}$; donc $\frac{116}{4x+5}$ est le quotient de $\frac{116}{1}$ divisés par $\frac{-4}{7}$; mais ce quotient est $\frac{-812}{4}$, ou -203 ; donc $\frac{116}{4x+5} = -203$; donc $\frac{45}{2x+3} + \frac{116}{4x+5} = 210 - 203 = 7$.

Voici comment on résout cette équation à la maniére ordinaire ; $56xx$

 $-258x$

$-258x=468$; donc $xx-\frac{258x}{56}=\frac{468}{56}$: le coëfficient du second terme est ici $-\frac{258}{56}$, la moitié de ce coëfficient $\frac{129}{56}$, & son quarré $\frac{16641}{56\times56}$; ajoûtez ce quarré à chaque membre de l'équation, & vous aurez $xx-\frac{258x}{56}+\frac{16641}{56\times56}=\frac{468}{56}+\frac{16641}{56\times56}=\frac{26208+16641}{56\times56}=\frac{42849}{56\times56}$; tirez la racine quarrée des deux côtés, c'est-à-dire, de $xx-\frac{258x}{56}+\frac{16641}{56\times56}$ d'un côté, & de $\frac{42849}{56\times56}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{129}{56}=\pm\frac{207}{56}$; par conséquent $x=+6$, ou $-1\frac{11}{28}$.

EXEMPLE 9.

Soit l'équation $15x-xx=56$. Cette équation étant résolue par le théorême général donne $x=8$, ou 7; ce qu'on trouve ainsi par la méthode ordinaire. Changez tous les signes pour rendre la quantité xx affirmative, & vous aurez $xx-15x=-56$. Ajoûtant de part & d'autre le quarré de la moitié du coëfficient du second terme, & vous aurez $xx-15x+\frac{225}{4}=-56+\frac{225}{4}=\frac{1}{4}$; donc $x-\frac{15}{2}=\pm\frac{1}{2}$, & $x=8$, ou 7. Le principal but que je me suis proposé dans cet exemple, est de faire voir, qu'en résolvant une équation du second degré à l'aide du théorême général, il n'est besoin d'aucune transposition pour rendre le quarré xx affirmatif, supposé qu'il ne le fût pas, comme dans l'équation proposée $15x-xx=56$; transposez $15x$, & vous aurez $-xx$, c'est-à-dire, $-1xx=-15x+56$. En rapportant cette équation à la formule générale de l'Art. 102, & en la résolvant par le moyen du théorême général de l'Art. 103, il viendra $A=-1$, $B=-15$, $C=56$, $BB=225$, $4AC=-224$, $ss=1$, $s=1$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{-15+1}{-2}=\frac{-14}{-2}=+7$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{-15-1}{-2}=+8$.

Comment il faut s'y prendre quand les Racines d'une équation du second degré sont inexprimables.

106. Comme il n'y a que très-peu de nombres quarrés en comparaison de ceux qui ne sont pas tels, & que les équations du second degré se résolvent par l'extraction de la racine quarrée, il s'ensuit qu'il y a peu de ces équations susceptibles d'une solution exprimable en nombres, en com-

comparaiſon de celles qui ne le ſont pas: mais comme la racine quarrée peut être tirée à tel point d'approximation qu'on voudra, la ſolution d'une équation du ſecond degré, qui dépend de cette extraction de racine, peut auſſi être donnée à tel point de préciſion qu'on pourra demander; comme il paroîtra par l'exemple ſuivant.

Exemple 10.

Soit l'équation $xx-4x+1=0$, ou $xx=4x-1$. Ici $A=1$, $B=4$, $C=-1$, $BB=16$, $4AC=-4$, $ss=12$, $s=\sqrt{12}$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{4+\sqrt{12}}{2}$, & $\frac{B-s}{2A}=\frac{4-\sqrt{12}}{2}$; donc $x=\frac{4+\sqrt{12}}{2}$, ou $\frac{4-\sqrt{12}}{2}$: voyons ſi ces deux fractions ne peuvent point être réduites à des termes plus ſimples: il eſt clair d'abord que $\frac{4}{2}=2$; outre cela $\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$; car $12=3\times 4$; par conſéquent $\sqrt{12}=\sqrt{3}\times\sqrt{4}=\sqrt{3}\times 2$; donc $\frac{\sqrt{12}}{2}=\sqrt{3}$; d'où il s'enſuit, que $x=2+\sqrt{3}$, ou $2-\sqrt{3}$; mais l'extraction de $\sqrt{3}$ en y employant trois caractéres décimaux donne 1.732: donc $2+\sqrt{3}=3.732$, & $2-\sqrt{3}=.268$; donc $x=$ (à peu près) 3.732, ou $.268$, comme on pourra s'en mieux aſſurer encore par les opérations ſuivantes.

Premiérement $x=3.732$; donc $xx=13.927824$; & $4x=14.928$; donc $4x-xx=1.000176$; donc $xx-4x=-1.000176$; donc $xx-4x+1=-.000176=0$ à peu près. Secondement, ſoit $x=.268$, & vous aurez $xx=.071824$ & $4x=1.072$, & $4x-xx=1.000176$; donc $xx-4x=-1.000176$; donc $xx-4x+1=-.000176=0$, à peu près; ainſi dans les deux cas, on ſatisfait à la condition de l'équation avec une exactitude proportionée au nombre des caractéres décimaux qu'on employe pour extraire la racine quarrée de 3.

On peut dire, quoique la choſe ait un air de paradoxe, que les deux valeurs de la quantité inconnue trouvées dans le cas préſent, & dans d'autres cas pareils, ſont juſtes quoiqu'inexprimables en nombres. Ainſi je puis démontrer, que ſi l'une des deux valeurs de x, ſavoir $2+\sqrt{3}$, ou $2-\sqrt{3}$, eſt ſubſtituée à la place de x, nous aurons cette équation $xx-4x+1=0$, qui étoit l'équation propoſée: pour cet effet, faiſons $\sqrt{3}=s$; & premiérement, ſoit $x=2+\sqrt{3}$, ou $2+s$; & nous aurons $xx=4+4s+ss$, & $-4x=-8-4s$; & $xx-4x=4+4s+ss-8-4s=ss-4$; mais ſi $s=\sqrt{3}$, $ss=3$, & $ss-4=-1$; donc $xx-4x=-1$, & $xx-4x+1=0$: ſecondement ſoit $x=2-\sqrt{3}$, ou $2-s$, & nous

nous aurons $xx = 4 - 4s + ss$, & $-4x = -8 + 4s$, & $xx - 4x = ss - 4 = -1$, comme ci-deſſus; donc encore $xx - 4x + 1 = 0$.

Des Racines impoſſibles dans une équation du ſecond degré, & d'où vient leur impoſſibilité.

107. Les racines des équations du ſecond degré ſont non ſeulement très-ſouvent inexprimables, mais quelquefois auſſi impoſſibles, comme il paroîtra par l'exemple ſuivant.

EXEMPLE II.

Soit l'équation $xx - 4x + 6 = 0$, ou $xx = 4x - 6$. En ce cas $A = 1$, $B = 4$, $C = -6$, $BB = 16$, $4AC = -24$, $ss = -8$, $s = \sqrt{-8}$, $\frac{B+s}{2A} = \frac{4+\sqrt{-8}}{2}$, $\frac{B-s}{2A} = \frac{4-\sqrt{-8}}{2}$; mais $\frac{4}{2} = 2$, & $-8 = -2 \times +4$; donc $\sqrt{-8} = \sqrt{-2} \times \sqrt{+4} = \sqrt{-2} \times 2$; donc $\frac{\sqrt{-8}}{2} = \sqrt{-2}$; donc dans cette équation $x = 2 + \sqrt{-2}$, ou $2 - \sqrt{-2}$; mais comme aucune quantité, affirmative ou négative, multipliée par elle-même, ne ſauroit former un produit négatif, il s'enſuit, que $\sqrt{-2}$, eſt non ſeulement une quantité inexprimable, mais auſſi impoſſible; & par conſéquent, que les deux valeurs de x dans cette équation $2 + \sqrt{-2}$ & $2 - \sqrt{-2}$ ſeront impoſſibles l'une & l'autre.

De ce qui vient d'être dit touchant ces ſortes de racines, il ſuit que les deux racines d'une équation du ſecond degré, doivent être poſſibles toutes deux, ou toutes deux impoſſibles: car on vient de voir dans la ſolution de la derniére équation, que l'impoſſibilité des racines naît de l'impoſſibilité de la quantité s, c'eſt-à-dire de la racine quarrée de ss, lorſque cette derniére quantité eſt négative; quand s eſt poſſible, les deux racines de l'équation, ſavoir, $\frac{B+s}{2A}$ & $\frac{B-s}{2A}$ ſeront poſſibles auſſi; d'un autre côté, quand s eſt impoſſible, les deux racines ſeront impoſſibles pareillement.

Puiſque la poſſibilité ou l'impoſſibilité des deux racines d'une équation du ſecond degré dépend de ce que la quantité ss eſt affirmative ou négative, il s'enſuit, que quand ss & par cela même s eſt égale à rien, les racines ſeront dans les limites qui ſéparent le poſſible de l'impoſſible. Si $s = 0$, nous aurons $\frac{B+s}{2A} = \frac{B}{2A}$, & $\frac{B-s}{2A} = \frac{B}{2A}$; ainſi les deux racines inégales d'une équation du ſecond degré approchent de plus en plus de l'état d'égalité, à meſure qu'elles approchent d'un état d'impoſſibili-

ſibilité, mais ne parviennent néanmoins à être égales, que quand elles parviennent au point qui ſépare la poſſibilité de l'impoſſibilité.

Manière de trouver la ſomme & le produit des deux racines d'une équation du ſecond degré ſans la réſoudre; comme auſſi celle de former une pareille équation, qui ait pour ſes racines deux nombres quelconques donnés.

108. *Dans une équation du ſecond degré exprimée par cette formule générale, ſavoir,* $Axx = Bx + C$, *la ſomme des racines ſera toujours* $\frac{B}{A}$, *& le produit de leur multiplication* $\frac{-C}{A}$: car les racines de cette équation ſont $\frac{B+s}{2A}$ & $\frac{B-s}{2A}$, dont la ſomme eſt $\frac{2B}{2A}$ ou $\frac{B}{A}$. En multipliant enſemble ces deux racines, leur produit donnera $\frac{BB-ss}{4AA}$; mais $ss = BB + 4AC$, comme on l'a vu dans l'Art. 103; ainſi $ss - BB = 4AC$, & $BB - ss = -4AC$; donc $\frac{BB-ss}{4AA}$, ou le produit des deux racines vaut $\frac{-4AC}{4AA} = \frac{-C}{A}$.

Cela étant, ſi $A = 1$, c'eſt-à-dire, ſi l'équation eſt $xx = Bx + C$, la ſomme des racines ſera B, & leur produit $-C$; c'eſt-à-dire que de la maniére dont l'équation eſt rangée à-préſent, la ſomme des racines ſera le coëfficient de l'inconnue dans le ſecond membre de l'équation, & leur produit, ce que nous appellons le terme abſolu, dont le ſigne a été changé.

On peut déduire de-là une méthode aiſée de former une équation du ſecond degré, qui ait pour ſes racines deux nombres quelconques donnés: Comme par exemple, ſi l'on vouloit avoir une équation de deux dimenſions dont les racines fuſſent les nombres 3 & 4; il eſt clair que la ſomme de ces nombres eſt 7, & le produit de leur multiplication 12; ainſi il n'y a qu'à former une équation dont un des membres ſoit xx, & l'autre membre $7x - 12$, ſavoir $xx = 7x - 12$; & les racines de cette équation feront les nombres donnés 3 & 4, comme nous le prouverons à l'inſtant: ſi l'on avoit pris pour racines 3 & -4, leur ſomme auroit été -1, leur produit -12, & l'équation même $xx = -x + 12$: en prenant pour racines -3 & $+4$, leur ſomme ſera $+1$, leur produit -12, & l'équation $xx = x + 12$: enfin, ſi l'on demandoit que les racines fuſſent -3 & -4, leur ſomme feroit -7, leur produit $+12$, & l'équation $xx = -7x - 12$. Je démontrerai un cas général, qui ſuffira pour faire voir comment il faut s'y prendre dans tous les autres cas du même genre: ſoient les racines propoſées p & q, dont la ſomme eſt $p + q$, & le produit pq; l'équation ſera $xx = \overline{p+q} \times x - pq$. En rapportant cette équation au théorême gé-

néral de l'Art. 103. nous aurons $A=1$, $B=\overline{p+q}$, $C=-pq$, $BB=pp+2pq+qq$, $4AC=-4pq$, $ss=pp-2pq+qq$, $s=p-q$, $\frac{B+s}{2A}=\frac{p+q+p-q}{2}=\frac{2p}{2}=p$, $\frac{B-s}{2A}=\frac{p+q-p+q}{2}=\frac{2q}{2}=q$; donc les deux racines de cette équation sont p & q. Ce qu'il falloit démontrer.

Au reste, si l'on vouloit former une équation de deux dimensions, qui eût deux racines quelconques données, & qui fussent impossibles, la chose pourroit se faire par la méthode que nous venons d'expliquer, pourvu que ces racines impossibles eussent la forme requise pour une équation du second degré. Supposons, par exemple, que je veuille donner à une pareille équation les deux racines impossibles, $2+\sqrt{-3}$ & $2-\sqrt{-3}$; car quoiqu'il n'y ait aucune quantité possible, qui, multipliée par elle-même, puisse former un produit négatif, une quantité impossible le peut; car c'est en cela même que consiste son impossibilité. Faisant donc $ss=-3$, j'ai $s=\sqrt{-3}$, & les deux racines seront $\overline{2+s}$, & $\overline{2-s}$; la somme de ces racines est 4, & leur produit $4-ss$; mais si $ss=-3$, $-ss=+3$ & $4-ss=4+3=7$; donc l'équation, qui aura ces racines, sera $xx=4x-7$. Pour qu'il ne reste aucun doute à cet égard, on n'a qu'à résoudre l'équation: car si $xx=4x-7$, c'est-à-dire, si $xx-4x=-7$, nous aurons $xx-4x+4=-3$, & $x-2=\pm\sqrt{-3}$, & $x=2+\sqrt{-3}$, ou $2-\sqrt{-3}$.

Comment on détermine les signes des racines possibles d'une équation du second degré sans la résoudre.

109. Si l'on place tous les termes d'une équation du second degré dans un des membres, desorte que l'autre membre soit égal à rien; & que le terme, qui contient xx, quarré de l'inconnue, soit le premier, celui, où se trouve x, le second, & le terme absolu le dernier; le nombre des racines affirmatives & négatives dans une pareille équation pourra être exactement déterminé par la règle suivante. *Aussi souvent qu'il y a changement dans les signes depuis le premier terme jusqu'au dernier, autant l'équation a de racines affirmatives; au-lieu que le nombre des racines négatives est toujours égal au nombre de fois que les signes sont les mêmes.* Cette règle convient à toutes les équations, de quelque degré qu'elles puissent être; mais nous n'en donnerons ici la démonstration que rélativement aux équations de deux dimensions, après avoir fait précéder quelques éclaircissemens.

2. Cas.



1. CAS.

Soit l'équation $axx-bx+c=0$. On trouve ici deux changemens en parcourant tous les termes depuis le premier jusqu'au dernier, savoir, depuis $+axx$ jusqu'à $-bx$, & depuis $-bx$ jusqu'à $+c$; ainsi les racines de cette équation sont toutes deux affirmatives.

2. CAS.

Soit l'équation $axx-bx-c=0$. De $+axx$ à $-bx$ il y a un changement, & de $-bx$ à $-c$ point. Donc cette équation a une racine affirmative, & une négative.

3. CAS.

Soit l'équation $axx+bx-c=0$. De $+axx$ à $+bx$ il n'y a aucun changement de signe, mais bien depuis $+bx$ à $-c$; ainsi cette équation a pareillement une racine affirmative & une autre négative.

4. CAS.

Enfin soit l'équation $axx+bx+c=0$. Ici il n'y a point de changement, & par conséquent les racines de cette équation sont négatives toutes deux. Ces différens cas peuvent se démontrer de la maniére suivante.

1. CAS.

Soit l'équation $axx-bx+c=0$, ou $axx=bx-c$. Ici le produit des deux racines est $\frac{c}{a}$ par le dernier Article, c'est-à-dire, que le produit des deux racines est une quantité affirmative, & par conséquent ces racines doivent être toutes deux affirmatives, ou toutes deux négatives; mais elles ne sauroient être négatives l'une & l'autre, puisque leur somme est $\frac{+b}{a}$ par le même Article; donc elles doivent être toutes deux affirmatives.

2. CAS.

Soit l'équation $axx-bx-c=0$, ou $axx=bx+c$. Ici le produit des deux racines est $-\frac{c}{a}$, & par conséquent ces racines doivent être de différent genre, l'une affirmative & l'autre négative; & comme leur somme, $+\frac{b}{a}$, est une quantité affirmative, on peut en inférer que la plus grande racine est affirmative.

3. CAS.

Soit l'équation $axx+bx-c=0$, ou $axx=-bx+c$. Ici le produit des deux racines est encore $\frac{-c}{a}$, ce qui fait voir qu'une des racines doit être affirmative & l'autre négative; & puisque leur somme $\frac{-b}{a}$ est une quantite négative, la plus grande des racines doit nécessairement être négative.

4. CAS.

Enfin, soit l'équation $axx+bx+c=0$, ou $axx=-bx-c$. Ici le produit des deux racines est $+\frac{c}{a}$, quantité affirmative; ainsi les racines sont toutes deux affirmatives, ou toutes deux négatives; mais la premiére supposition ne sauroit avoir lieu, parce que leur somme $\frac{-b}{a}$ est négative; donc il faut qu'elles soient l'une & l'autre négatives.

La Règle précédente ne s'étend pas aux racines impossibles.

La règle, que nous venons de donner pour déterminer le nombre des racines affirmatives & négatives, n'a rapport qu'aux seules racines possibles; car celles qui sont impossibles, n'appartiennent à aucune des deux classes; elles sont même si capricieuses à cet égard, que dans une seule & même équation, les mêmes racines impossibles paroissent quelquefois sous l'une des formes, & d'autrefois sous l'autre: comme par exemple, cette équation $xx+3=0$ peut être remplie de deux maniéres sans rien changer ni à l'équation, ni à ses racines; savoir, en mettant $xx+0x+3=0$, équation, dont les deux racines sont affirmatives en vertu de la règle démontrée dans cet Article; ou bien $xx-0x+3=0$: équation qui quoiqu'elle soit absolument la même que l'autre, dont elle ne différe que dans la forme, a ses deux racines négatives. La raison de cette absurdité est, que les deux racines de l'équation $xx+3=0$ sont impossibles, & paroissent sous deux formes différentes dans deux équations, qui au fond sont la même. Pour s'en convaincre on n'a qu'à dégager l'inconnue; car si $xx+3=0$, nous avons $xx=-3$, & $x=+\sqrt{-3}$, ou $-\sqrt{-3}$, qui sont toutes deux des quantités impossibles. Par exemple encore, l'équation $x^3-3=0$ peut être remplie de différentes maniéres; car on peut lui donner cette forme $x^3-0x^2+0x-3=0$: équation qui, par la règle précédente, a trois racines affirmatives; ou bien celle-ci, $x^3-0x^2-0x-3=0$; équation, qui n'a qu'une racine

ne affirmative, & deux négatives. De-là un Algébriste un peu habile auroit d'abord inféré (ce qui est aussi très-vrai) que deux des racines de l'équation $x^3 - 3 = 0$ sont impossibles, & qu'elles tenoient lieu de quantités affirmatives dans la premiére maniére d'exprimer l'équation, & de quantités négatives dans la derniére. Mais c'est à quoi nous aurons occasion de revenir quand nous traiterons des équations cubiques.

Des Equations du quatriéme degré, & autres qui paroissent sous la forme d'Equations de deux dimensions.

110. En voilà assez sur la solution, la nature, & les propriétés des équations de deux dimensions: je n'ajoûterai qu'un ou deux exemples de quelques autres équations, qui paroissent quelquefois sous la forme d'équations du second degré.

EXEMPLE 12.

Soit l'équation proposée $\frac{1600}{xx} + xx = 116$. Donc $1600 + x^4 = 116xx$; donc $x^4 = 116xx - 1600$. Cette équation est, à proprement parler, de quatre dimensions, puisque l'inconnue y est élevée à la quatriéme puissance. Or comme toute équation possible du second degré a deux racines, qui en donnent également la solution, ainsi une équation cubique peut avoir trois pareilles racines, une équation de quatre dimensions quatre, &c. Mais l'équation $x^4 = 116xx - 1600$, quoiqu'elle soit de quatre dimensions, & ait quatre racines, a pourtant la forme d'une équation de deux dimensions, si l'on considére xx comme étant la quantité inconnue; en ce cas x^4 est le quarré de l'inconnue, & l'équation doit être rapportée à la formule générale de l'Art. 103, de la maniére suivante; $A = 1$, $B = 116$, $C = -1600$, $BB = 13456$, $4AC = -6400$, $ss = 7056$, $s = 84$ $\frac{B+s}{2A} = 100$ $\frac{B-s}{2A} = 16$; donc dans cette équation $xx = 100$ ou 16: en faisant $xx = 100$, nous aurons $x = +$ ou -10; si $xx = 16$, nous aurons $x = +$ ou -4; donc les quatre racines de cette équation de quatre dimensions sont, $+10 - 10 + 4 - 4$: mais quoique dans cette équation x ait quatre valeurs, xx n'en a que deux, savoir 100 & 16, dont chacune substituée à la place de xx dans l'équation originale résoudra l'égalité.

N. B. Toutes les fois que deux des quatre racines d'une équation du quatriéme degré sont égales, & contraires aux deux autres, l'équation paroîtra être du second degré, & pourra être résolue comme si elle en étoit réellement.

EXEMPLE 13.

Soit l'équation $\frac{576}{xx} - xx = 55$: nous avons ici $576 - x^4 = 55xx$, & $x^4 + 55xx = 576$, & $x^4 = -55x^2 + 576$; donc suivant la formule générale de l'Art. 103, $A = 1$, $B = -55$, $C = 576$, $BB = 3025$, $4AC = 2304$, $ss = 5329$, $s = 73$, $\frac{B+s}{2A} = 9$, $\frac{B-s}{2A} = -64$; par conséquent dans cette équation, $xx = +9$ ou -64. Si $xx = +9$, $x = +$ ou -3; si $xx = -64$, $x = +\sqrt{-64}$, ou $-\sqrt{-64}$: valeurs, qui sont l'une & l'autre impossibles, & qui, substituées à la place de xx dans l'équation originale, résolvent l'égalité. On voit par cet exemple, qu'une équation du quatriéme degré peut avoir quatre racines, & n'en sauroit jamais avoir davantage; mais elle en a quelquefois moins, quand quelques-unes de ses racines sont impossibles. Il seroit facile même de prouver par des exemples, que cette impossibilité s'étend quelquefois sur toutes les racines d'une équation du quatriéme degré Ceux qui pourroient desapprouver ces solutions, trouveront peut-être celle-ci plus à leur gré. Soit l'équation $Ax^4 = Bx^2 + C$; ici metttant z pour xx, & par conséquent zz pour x^4, l'équation deviendra une équation ordinaire du second degré, $Azz = Bz + C$, dont la solution fera connoître z ou xx, & par cela même x; supposons que l'équation soit $Ax^6 = Bx^3 + C$; en substituant z à la place de x^3, l'équation ne sera que de deux dimensions, & la méme que dans l'autre exemple, savoir $Azz = Bz + C$, dont la solution donnera z ou x^3, & conséquemment x par une extraction de racine cubique: enfin, soit l'équation $Ax = B \times \sqrt{x} + C$; en mettant zz pour x, & z pour $\sqrt{x}$, l'équation sera $Azz = Bz + C$, comme auparavant, ainsi z, & par conséquent zz ou x seront connues.

Solution de quelques problêmes, qui se réduisent à des Equations du second degré.

PROBLEME 69.

111. *Diviser le nombre* 60 *en deux parties, qui soient telles que le produit de leur multiplication fasse* 864.

SOLUTION.

Soit une des parties nommée x; alors l'autre partie sera $60 - x$, & le produit de leur multiplication $60x - xx$; ainsi l'équation sera $60x - xx = 864$; donc $xx + 864 = 60x$, & $xx = 60x - 864$: cette équation rappor-

portée à la formule générale de l'Art. 103, donne $A=1$, $B=60$, $C=-864$, $BB=3600$, $4AC=-3456$, $ss=144$, $s=12$, $\frac{B+s}{2A}=36$, $\frac{B-s}{2A}=24$; donc les parties cherchées font 24 & 36: valeurs qui satisfont l'une & l'autre aux conditions du problême.

Remarques sur le Problême précédent.

1. Remarque.

Ce problême fait voir clairement la néceffité que la quantité inconnue ait quelquefois deux valeurs différentes dans une feule & même équation: car fi je défigne ici la plus grande partie de 60 par x, la plus petite fera $60-x$, & l'équation même $60x-xx=864$: fuppofons préfentement que x défigne la plus petite partie, alors la plus grande fera $60-x$, & l'équation reftera $60x-xx=864$; ainfi nous retombons toujours dans la même équation, foit que x exprime la plus grande ou la plus petite partie; d'où l'on peut inférer, que la folution de cette équation doit nous donner l'une & l'autre des parties cherchées, ou aucune des deux; puifqu'il ne fauroit y avoir de raifon pourquoi elle nous donneroit plutôt l'une que l'autre.

2. Remarque.

Ce même problême fert à faire fentir la néceffité qu'il y ait quelquefois des racines impoffibles, c'eft-à-dire, quand les cas des problêmes qu'elles doivent réfoudre deviennent impoffibles: comme par exemple, fi un nombre, tel que 60, eft divifé en deux parties, plus les deux parties approchent de l'égalité, plus le produit de leur multiplication fera grand; & par conféquent fi les parties font égales, le produit fera le plus grand poffible: ainfi fuppofant que les parties font 24 & 36, le produit fera 864; fi elles font 25 & 35, le produit fera 875; fi 30 & 30, le produit montera à 900, qui eft le plus grand poffible. Imaginons à-préfent un cas impoffible, & qu'on demande de divifer le nombre 60 en deux parties qui foient telles que le produit de leur multiplication monte à 901; l'équation fera $60x-xx=901$, laquelle étant réfolue fuivant le théorême de l'Art. 103, donne $x=\frac{60+\sqrt{-4}}{2}$, ou $\frac{60-\sqrt{-4}}{2}$; mais ces valeurs de x peuvent être exprimées plus fimplement ainfi; $-4=-1\times+4$; donc $\sqrt{-4}=\sqrt{-1}\times\sqrt{+4}=\sqrt{-1}\times 2$; donc $\frac{\sqrt{-4}}{2}=\sqrt{-1}$; mais $\frac{60}{2}=30$; ainfi les deux parties cherchées font $30+\sqrt{-1}$, & $30-\sqrt{-1}$, quantités qui font

font l'une & l'autre impoſſibles à cauſe de l'impoſſibilité de $\sqrt{-1}$; & cependant ces deux parties, conſidérées d'une maniére abſtraite, ſatisfont aux conditions du problême; car faiſant $\sqrt{-1}$ égale à s, les deux parties feront $30+s$ & $30-s$; dont la ſomme vaut 60, & le produit $900-ss$; mais ſi $s=\sqrt{-1}$, nous aurons $ss=-1$, & moins $ss=+1$, & $900-ss=901$; donc le produit des deux parties $30+\sqrt{-1}$, & $30-\sqrt{-1}$ monte à 901, comme on le demandoit.

3. Remarque.

Enfin, le problême en queſtion indique auſſi la raiſon pourquoi une des racines d'une équation du ſecond degré ne ſauroit devenir impoſſible ſans que l'autre le devienne auſſi. Deux quantités impoſſibles ajoûtées enſemble, peuvent quelquefois en faire une poſſible, à cauſe que l'une eſt autant impoſſible dans un ſens que l'autre l'eſt dans un ſens oppoſé: c'eſt ainſi que les deux quantités impoſſibles $30+\sqrt{-1}$ & $30\ \sqrt{-1}$ ajoûtées enſemble font 60, les racines ſourdes & impoſſibles $+\sqrt{-1}$ & $-\sqrt{-1}$ s'entre-détruiſant; mais en ajoûtant enſemble une quantité poſſible & une autre impoſſible, la ſomme de cette addition ne ſauroit jamais être une quantité poſſible. Donc les deux parties de 60 dans ce problême doivent être poſſibles toutes deux, ou l'une & l'autre impoſſibles.

Probleme 70.

112. *Il y a trois nombres en proportion continue, dont le terme moyen vaut ſoixante & la ſomme des extrêmes cent vingt & cinq. On demande la valeur des extrêmes.*

Solution.

Nommant les extrêmes x & $125-x$, nous aurons cette proportion; x eſt à 60 comme 60 à $125-x$, d'où réſulte par la multiplication des extrêmes & des moyennes, $125x-xx=3600$, ou $xx+3600=125x$, ou $x^2=125x-3600$: Ici $A=1$, $B=125$, $C=-3600$, $BB=15625$, $4AC=-14400$, $ss=1225$, $s=35$, $\frac{B+s}{2A}=80$, $\frac{B-s}{2A}=45$; donc dans cette équation, $x=45$ ou 80; mais x repréſente l'extrême qu'on veut, l'autre étant toujours $125-x$, & l'équation reſtant la même, ſavoir, $125x-xx=3600$; ainſi les deux extrêmes ſont 45 & 80, & ſatisfont aux conditions du problême; car 45 ſont à 60 comme $\frac{45}{15}$ à $\frac{60}{15}$, c'eſt-à-dire, comme 3 à 4; & 60 ſont à 80 comme $\frac{60}{20}$ à $\frac{80}{20}$, auſſi comme 3 à 4.

PRO-



PROBLEME 71.

113. *Connoissant la somme ou la différence de deux nombres, & la somme de leurs quarrés, on demande les nombres mêmes.*

SOLUTION.

1. *Cas.* Soit la somme des nombres cherchés 28, & celle de leurs quarrés 400; mettant x & $28-x$ pour les deux nombres, le quarré du premier sera xx, celui du second $784-56x+xx$, & la somme de ces quarrés $2xx-56x+784=400$; & la même équation se trouvera, quel des deux nombres que x représente; ainsi les deux valeurs de x dans cette équation seront les deux nombres cherchés; mais si $2xx-56x+784=400$, nous aurons $2xx-56x=-384$, & divisant le tout par 2, $xx-28x=-192$, c'est-à-dire $xx=28x-192$: équation qui, étant résolue suivant le théorême de l'Art. 103, donne $x=12$ ou 16; ainsi 12 & 16 sont les nombres cherchés.

2. *Cas.* Supposons à-présent la différence des deux nombres donnée; qu'elle soit par exemple 4, & la somme des quarrés 400, comme ci-dessus; cela étant, j'appelle le petit nombre x & le grand $x+4$: la somme de leurs quarrés sera $2xx+8x+16=400$; d'où l'on peut déduire $2xx+8x=384$, $xx+4x=192$, $xx+4x+4=196$, $x+2=\pm 14$, $x=+12$ ou -16; mais comme ces deux nombres $+12$ & -16 ne sauroient être ceux que demande le problême, puisque leur différence n'est pas 4, mais 30. Pour résoudre cette difficulté, il faut considérer, que quand x a été mis pour le plus petit nombre, & $x+4$ pour le plus grand, l'équation étoit $2xx+8x+16=400$; mais si x exprimoit le plus grand nombre, & par conséquent $x-4$ le plus petit, l'équation seroit $2xx-8x+16=400$, différente de la premiére; puis donc qu'il naît une autre équation suivant que x représente le plus grand nombre ou le plus petit, il n'est pas possible qu'une seule & même équation donne les deux nombres. Voici proprement l'explication de cette espéce d'énigme: il y a deux paires de nombres qui résolvent également le problême, & l'équation $2xx+8x+16=400$ donne le plus petit nombre de chaque paire; car faisant $x=12$, & $x+4=16$, les nombres 12 & 16 résoudront la question; d'un autre côté, faisant $x=-16$, $x+4$ sera $=-12$, & les nombres -16 & -12 donneront pareillement la solution du problême; car leur différence est $+4$, & la somme de leurs quarrés $+400$: il paroît par-là, que les solutions négatives sont aussi bonnes dans la nature des choses que les solutions affirmatives, quoique

nous n'en jugions pas ainsi ordinairement; mais comme la vérité ne dépend point de notre maniére d'envisager les choses, & que les nombres négatifs ne différent pas davantage des nombres affirmatifs, que les affirmatifs ne différent l'un de l'autre, c'est-à-dire en dégré & pas en espéce, on peut dire que les quantités négatives n'appartiennent pas moins à la classe des nombres, que celles qui sont affirmatives.

PROBLEME 72.

114. *On demande deux nombres dont la somme soit dix-sept, & la somme de leurs cubes mille trois cens quarante-trois.*

SOLUTION.

Nommant les deux nombres cherchés x & $17-x$, le cube du premier sera xxx, & celui du second $4913-867x+51xx-xxx$, comme on peut s'en convaincre par le calcul suivant;

$$\begin{array}{r} 17-x \\ 17-x \\ \hline 289-17x+xx \\ -17x \\ \hline 289-34x+xx \\ 17-x \\ \hline 4913-578x+17xx-x^3 \\ -289x+34xx \\ \hline 4913-867x+51xx-x^3. \end{array}$$

Ainsi la somme de ces deux cubes sera $51xx-867x+4913=1343$, & l'équation se trouvera la même, quel des deux nombres cherchés qui soit désigné par x mais si $51xx-867x+4913=1343$, nous aurons $51xx-867x=-3570$; divisant le tout par 51, ce qui peut se faire sans fractions, & rend l'équation plus simple, le quotient est $xx-17x=-70$. Cette équation, résolue suivant l'Art. 103, donne $x=7$, ou 10; donc 7 & 10 sont les deux nombres cherchés.

PROBLEME 73.

115. *Soit un quarré dont le côté ait cent & dix pouces; on demande la longueur & la largeur d'un rectangle, dont le périmétre surpasse celui du quarré de quatre pouces, mais dont l'aire ait quatre pouces quarrés de moins que celle du quarré.*

N. B. Par le périmétre d'une figure plane on entend la longueur d'une

ne ligne qui mesure exactement tout le contour de la figure: desorte que le périmétre d'un quarré est égal au côté pris quatre fois, & celui d'un rectangle égal à deux fois la longueur du rectangle, & à autant de fois sa largeur, ajoûtées ensemble.

SOLUTION.

Puisque le côté du quarré donné est de 110 pouces, son aire sera de 12100 pouces quarrés, & l'aire du rectangle de 12096 des mêmes pouces: d'un autre côté, le périmétre du quarré donné est de 444 pouces; ainsi la moitié du périmétre, c'est-à-dire la longueur & la largeur ajoûtées ensemble, doit être de 222 pouces. Cela étant, si l'on appelle la longueur ou la largeur x, l'autre dimension sera $222 - x$, & l'aire $222x - xx = 12096$. Cette équation, résolue suivant l'Art. 103, donnera $x = 96$ ou 126; donc la largeur du rectangle cherché doit être de 96 pouces, & la longueur de 126; & ces nombres satisfont aux conditions du problême; car deux fois la longueur sera 252, deux fois la largeur 192, & tout le périmétre 444; outre cela 126×96, ou l'aire sera 12096.

SCHOLIE.

Ce problême fait voir combien se trompent grossiérement ceux, qui regardent les aires des figures planes comme proportionelles à leurs périmétres; au-lieu qu'il paroît clairement ici, que le périmétre d'une figure surpasse celui d'une autre de la longueur de quatre pouces, & que * cependant l'aire de la première figure est surpassée par celle de la seconde de la quantité de quatre pouces quarrés. Ces sortes d'erreurs, à-la-

* *Cependant l'aire de la première figure est surpassée par celle de la seconde.*] En général (les périmétres étant égaux) la grandeur des aires dépend de l'égalité des côtés, & de leur nombre. C'est par cette égalité que le quarré, quoique son périmétre fût même plus petit, l'a emporté sur le rectangle: car pour ce qui est du nombre des côtés, il étoit égal, le rectangle & le quarré en ayant chacun quatre. Si l'on augmente le nombre des côtés, & qu'après avoir partagé la ligne a en quatre parties égales, dont chacune sera $= \frac{a}{4}$, on en fasse un quarré, l'aire sera $\frac{aa}{16}$; mais si on l'avoit partagée en six parties égales, pour en faire un exagone régulier, on auroit trouvé (en menant une perpendiculaire du centre du cercle qu'on auroit circonscrit à cet exagone) l'aire de l'exagone $= \frac{aa}{2\sqrt{48}}$: or comme ce dénominateur est plus petit que 16, il s'ensuit que l'aire $\frac{aa}{2\sqrt{48}}$ est plus grande que l'aire $\frac{aa}{16}$; & l'on peut s'assurer par le calcul, que la même chose a lieu par rapport aux aires de tous les polygones réguliers isopérimétres, en croissant depuis le triangle équilatéral jusqu'au cercle par l'augmentation successive du nombre de leurs côtés.

la-vérité, ne se trouvent que dans des hommes d'une capacité tout-à-fait bornée, & n'y restent qu'aussi longtems que la matiére en question est pour eux un sujet de spéculation ; car dès que leur intérêt y est mêlé, & que l'erreur tourneroit à leur préjudice, ils ne tardent guéres à se détromper. La plupart des gens ont une aversion naturelle à penser d'une maniére abstraite, & à moins que d'y avoir quelque intérêt, aiment mieux soumettre leurs opinions à leur humeur, au caprice & à la coutume, ou bien n'avoir point d'opinions du tout, que d'examiner avec attention la nature des choses.

PROBLEME 74.

116. *Quelqu'un achète un certain nombre de bœufs pour quatre-vingts guinées, s'il en avoit acheté quatre de plus pour la même somme, il les auroit eus à meilleur marché, une guinée pièce : quel étoit le nombre des bœufs?*

SOLUTION.

J'appelle le nombre des bœufs x; ensuite pour trouver le prix de chaque bœuf je dis, si le nombre x de bœufs coute 80 guinées, que coutera un bœuf? & la réponse est $\frac{80}{x}$; & par la même raison, s'il y avoit quatre bœufs de plus d'achetés, c'est-à-dire, si pour le même argent l'acheteur avoit eu le nombre x de bœufs $+4$, le prix de chaque bœuf auroit été $\frac{80}{x+4}$; mais par le problême, le dernier prix est moindre que le premier d'une guinée ; ce qui donne cette équation, $\frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$; donc $80 - x = \frac{80x}{x+4}$; donc $\overline{80-x} \times \overline{4+x}$, ou $320 + 76x - xx = 80x$; donc $xx + 80x = 76x + 320$; donc $xx = -4x + 320$. Ici $A=1$, $B=-4$, $C=320$, $BB=16$, $4AC=1280=ss=1296$, $s=36$, $\frac{B+s}{2A}=16$, $\frac{B-s}{2A}=-20$; donc $x=+16$ ou -20; donc le nombre des bœufs étoit 16, la racine négative -20 ne pouvant être d'aucun usage dans la solution de ce problême. Pour le nombre de 16, il répond à la question ; car si 16 bœufs coutent 80 guinées, un bœuf coutera 5 guinées, au-lieu que si 20 bœufs coutent 80 guinées, un bœuf coutera 4 guinées.

N. B. L'équation $\frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$, donne $x=16$ ou -20, non parce que le nombre -20 est propre à résoudre le problême, mais parce qu'il résout l'équation ; car faisant $x=-20$, nous aurons $\frac{80}{x}=-4$,

&

& $\frac{80}{x} - 1 = -5$; d'un autre côté nous aurons $x+4=-16$, & $\frac{80}{x+4} = -5$; donc si $x=-20$, nous aurons $\frac{80}{x} - 1 = \frac{80}{x+4}$, à cause que les deux membres sont égaux à -5; & de même dans tous les autres cas il se trouvera, que les différentes racines d'une équation résoudront également cette équation, quoiqu'elles ne soient peut-être pas également propres à résoudre le problême d'où l'équation a été déduite; mais c'est de quoi nous aurons occasion de parler plus au long dans un autre endroit.

PROBLEME 75.

117. *Quelques personnes doivent à un Cabaretier pour leur écot sept livres sterling quatre schellings; mais deux de la compagnie s'étant sauvés quand il a été question de payer, chacun des autres a été obligé de payer un schelling de plus qu'il n'auroit fait sans cela: on demande le nombre des personnes.*

SOLUTION.

J'appelle le nombre des personnes x; pour trouver ensuite le nombre de schellings que chaque personne auroit dû payer, dites, si le nombre x de personnes devoit payer 144 schellings, quel a été l'écot de chacune d'elles? & la réponse est $\frac{144}{x}$; par la même raison $\frac{144}{x-2}$ exprime le nombre de schellings que chaque homme a payé effectivement; mais par la condition du problême, ce second écot est plus grand pour chacun d'un schelling que le premier; ainsi l'équation sera $\frac{144}{x} + 1 = \frac{144}{x-2}$; donc $144 + x = \frac{144x}{x-2}$; donc $\overline{x-2} \times \overline{144+x}$, ou $xx + 142x - 288 = 144x$; donc $xx = 2x + 288$. Ici $A=1$, $B=2$, $C=288$, $BB=4$, $4AC=1152$, $ss=1156$, $s=34$, $\frac{B+s}{2A}=18$, $\frac{B-s}{2A}=-16$; donc $x=+18$ ou -16; mais des racines négatives ne sauroient être admises dans ces sortes de problêmes; donc le nombre des personnes étoit 18, ce qui satisfait au problême; car $\frac{144}{18}=8$, & $\frac{144}{16}=9$.

PROBLEME 76.

118. *On demande quel est le nombre, qui, étant ajouté à sa racine quarrée, vaut deux cens & dix.*

SOLUTION.

Appellez le nombre cherché xx; alors sa racine quarrée sera x, & l'équation même $xx + x = 210$, ou $xx = - x + 210$; ici $A = 1$, $B = -1$, $C = 210$, $BB = 1$, $4AC = 840$, $ss = 841$, $s = 29$, $\frac{B+s}{2A} = 14$, $\frac{B-s}{2A} = -15$; donc $x = + 14$ ou $- 15$; donc xx, ou le nombre cherché, vaut 196 ou 225, dans la supposition que la racine quarrée de 225 est -15; & chacun de ces deux nombres satisfera au problême; car $196 + 14 = 210$, & $225 - 15 = 210$.

PROBLEME 77.

119. *On demande deux nombres tels, que le produit de leur multiplication soit cent quatre-vingts douze, & la somme de leurs quarrés six cens quarante.*

SOLUTION.

Nommant les deux nombres x & $\frac{192}{x}$, le quarré du premier sera xx, & celui du dernier $\frac{36864}{xx}$. La somme de leurs quarrés $xx + \frac{36864}{xx} = 640$, donnera la même équation, quel des deux nombres cherchés que x représente; mais si $xx + \frac{36864}{xx} = 640$, nous aurons $x^4 + 36864 = 640xx$; & $x^4 = 640xx - 36864$; ici $A = 1$, $B = 640$, $C = - 36864$, $BB = 409600$, $4AC = - 147456$, $ss = 262144$, $s = 512$, $\frac{B+s}{2A} = 576$, $\frac{B-s}{2A} = 64$; donc $xx = 576$, ou 64; donc $x = +$ ou $- 24$, ou bien $+$ ou $- 8$; donc les deux nombres cherchés sont 8 & 24.

PROBLEME 78.

120. *Un homme employe une certaine somme en marchandises, qu'il débite ensuite pour 24 livres, & il gagne autant pour cent que les marchandises lui ont couté. On demande ce qu'elles lui coutent.*

N. B. Le gain qu'on fait *pour cent* est celui qu'on fait autant de fois qu'on employe cent livres; & en cas que la somme employée n'aille pas à cent livres, c'est autant moins à proportion de ce qui manque à cette somme pour être égale à cent: ainsi celui qui gagne 2 livres sur 20 livres qu'il a employées, gagne 10 *pour* 100; car 20 est à 2, comme 100 à 10.

So-

SOLUTION.

Nommant la somme employée en marchandises x, le gain sera $24-x$; ainsi par la règle de trois, si x gagne $24-x$, quel auroit été le gain si 100 livres avoient été employées avec le même avantage? & la réponse sera $\frac{2400-100x}{x}$; donc $\frac{2400-100x}{x}$ exprimera ce qui aura été gagné *pour cent*; mais par la condition du problême, ce gain est égal à x, valeur de la somme qui a été employée; donc $x=\frac{2400-100x}{x}$, & $xx=2400-100x$: ici $A=1$, $B=-100$, $C=2400$, $BB=10000$, $4AC=9600$, $ss=19600$, $s=140$, $\frac{B+s}{2A}=20$, $\frac{B-s}{2A}=-120$; donc la somme employée étoit 20 livres, & le gain *pour vingt* 4 livres; donc le gain *pour cent* étoit 20 livres, somme égale à la somme employée.

PROBLEME 79.

121. *Un Marchand employe trente-trois livres sterling, quinze schellings en piéces de toile, qu'il revend pour quarante-huit schellings piéce, & il gagne autant en tout que chaque piéce lui a couté: on demande ce qu'il a payé pour chaque piéce.*

SOLUTION.

Soit x le nombre de schellings que chaque piéce a couté, & le gain, avec lequel chaque piéce aura été revendue, sera $48-x$; ainsi par la règle de proportion, si en employant x on gagne $48-x$, que gagnera-t-on si l'on employe 33 livres sterling 15 schellings, ou 675 schellings? & la réponse sera $\frac{32400-675x}{x}$; donc $\frac{32400-675x}{x}$ exprimera tout le gain; mais par la condition du problême, tout le gain est égal à x, l'argent donné pour chaque piéce; donc $x=\frac{32400-675x}{x}$, & $xx=32400-675x$; ici $A=1$, $B=-675$, $C=32400$, $BB=455625$, $4AC=129600$, $ss=585225$, $s=765$, $\frac{B+s}{2A}=45$, $\frac{B-s}{2A}=-720$; donc $x=45$ ou -720; donc chaque piéce a couté 45 schellings, & le gain fait sur chaque piéce est de 3 schellings; mais si 45 schellings en gagnent 3, 33 livres sterling 15 schellings, ou 675 schellings gagneront 45 schellings; ainsi le gain total étoit 45 schellings, & par cela même égal à ce que chaque piéce avoit couté.

N. B. Il est très-possible que deux différens problêmes produisent la mê-

même équation; & en ce cas l'équation doit satisfaire également à l'un & à l'autre problême: ainsi quoiqu'une pareille équation ait deux racines, & toutes deux affirmatives, il ne faut pas s'attendre que ces deux racines donneront également la solution d'un des problêmes; mais nous devons conclure, que quand une équation a deux racines, toutes deux affirmatives, dont une seule donne la solution du problême qui a produit l'équation, nous devons, dis-je, inférer de-là, que l'autre racine appartient à la solution de quelque autre problême, qui produit la même équation. C'est de quoi les deux problêmes suivans nous fournissent un exemple curieux.

PROBLEME 80.

122. *Deux Voyageurs* A *&* B, *partent en même tems de deux endroits* C *&* D, A *de* C *pour* D, *&* B *de* D *pour* C; *après s'être rencontrés, ils calculent le chemin qu'ils ont fait, & il se trouve que le chemin de* A *surpasse de trente milles celui de* B, *& qu'à proportion de la diligence qu'ils faisoient,* A *comptoit de gagner* D *en quatre jours, &* *que* B *comptoit de gagner* C *en neuf jours: on demande la distance entre* C *&* D.

SOLUTION.

Soit le nombre des milles qu'il y a entre *C* & *D* exprimé par x; ainsi x exprime le chemin de *A* & celui de *B* joints ensemble dans le tems qu'ils se sont rencontrés; ainsi, autant que les milles faits par *A* excédent $\frac{x}{2}$, autant les milles faits par *B* sont-ils en-deçà de $\frac{x}{2}$; mais suivant la supposition, les milles faits par *A* excédent ceux que *B* a faits de 30; donc *A* doit avoir fait $\frac{x}{2}+15=\frac{x+30}{2}$ milles; & *B* $\frac{x}{2}-15$ ou $\frac{x-30}{2}$ milles; par conséquent le chemin que *A* devoit faire encore, est $\frac{x-30}{2}$ milles, qu'il comptoit d'achever en quatre jours; & ce qui manquoit au chemin de *B* est $\frac{x+30}{2}$ milles, qu'il comptoit d'achever en neuf jours. Cela étant, tâchons de trouver combien de jours chacun d'eux a été en chemin; ce qui se pourra, en raisonnant de la maniére suivante: si *A* compte de faire $\frac{x-30}{2}$ milles en quatre jours, en combien de jours fera-t-il $\frac{x+30}{2}$ milles? la réponse est $\frac{4\times\frac{x+30}{2}}{\frac{x-30}{2}}=\frac{4\times\overline{x+30}}{x-30}$;

de-

de-même, si B compte de faire $\frac{x+30}{2}$ milles en 9 jours, en combien de jours a-t-il fait $\frac{x-30}{2}$ milles? & la réponse est $\frac{9\times\overline{x-30}}{x+30}$; donc A a voyagé $\frac{4\times\overline{x+30}}{x-30}$ jours, & B $\frac{9\times\overline{x-30}}{x+30}$ jours depuis le tems qu'ils se sont mis en chemin; mais comme ils sont partis en même tems, & qu'ils viennent de se rencontrer, ils doivent avoir voyagé le même nombre de jours; ainsi $\frac{4\times\overline{x+30}}{x-30}=\frac{9\times\overline{x-30}}{x+30}$: multipliant les deux membres de l'équation par $\overline{x-30}$, nous aurons $4\times\overline{x+30}=\frac{9\times\overline{x-30}\times\overline{x-30}}{x+30}$; ensuite multiplant $\overline{x+30}$, nous aurons $4\times\overline{x+30}\times\overline{x+30}=9\times\overline{x-30}\times\overline{x-30}$; tirant la racine quarrée de l'un & l'autre membre nous aurons $\pm 2\times\overline{x+30}=\pm 3\times\overline{x-30}$. Cette équation générale donne ces quatre équations particuliéres, savoir.

1ére, $+2\times\overline{x+30}=+3\times\overline{x-30}$.
2de, $+2\times\overline{x+30}=-3\times\overline{x-30}$.
3éme, $-2\times\overline{x+30}=+3\times\overline{x-30}$.
4éme, $-2\times\overline{x+30}=-3\times\overline{x-30}$.

Mais comme les deux derniéres de ces équations donnent précisément les mêmes valeurs que les deux premiéres, je ne ferai usage que de celles-ci.

Premiérement, supposons $+2\times\overline{x+30}=+3\times\overline{x-30}$, en ce cas nous aurons $2x+60=3x-90$, & $x=150$.

En second lieu, supposons $+2\times\overline{x+30}=-3\times\overline{x-30}$, nous aurons alors $2x+60=-3x+90$, & $x=6$; ainsi la distance entre les deux endroits C & D doit être ou de 150 milles ou de 6 milles; mais cette derniére distance est impossible, à cause que dans le tems que A a joint B, il avoit déjà fait 30 milles plus que B, sans être encore arrivé à l'endroit D; donc la distance entre C & D doit être de 150 milles, & ce nombre satisfait au problême; car A doit avoir fait $75+15$, ou 90 milles, & B $75-15$ ou 60 milles, depuis le tems de leur départ; par conséquent il restoit encore au voyageur A 60 milles à faire, & 90 milles au voyageur B; mais si A a pu faire 60 milles en 4 jours, il devoit, par la même raison, en faire 90 en 6 jours; & si B a pu faire 90 milles en 9 jours, il devoit en faire encore 60 en 6 jours; donc ils ont été en chemin le même nombre de jours depuis leur départ jusqu'au tems où ils se sont rencontrés, comme l'exige le problême.

PROBLEME 81.

123. *Deux Voyageurs* A & B, *partent de deux endroits* C & D *en même tems;* A *de* C *dans le dessein de passer par* D, & B *de* D *dans le dessein d'aller du même côté.* A *atteint* B; & *par le calcul de leur chemin il se trouve, qu'ils avoient fait ensemble trente milles, que* A *avoit passé par* D *depuis quatre jours,* & *que* B, *à proportion du chemin qu'il avoit fait, se trouvoit à la distance de neuf journées de* C. *On demande la distance entre les deux endroits* C & D.

SOLUTION.

Soit cette distance, exprimée en milles, nommée x. Il est évident que A a fait les milles x plus que B; mais par la supposition ils ont fait ensemble 30 milles; donc autant que les milles d'A excédent 15, autant ceux de B sont-ils au-dessous de ce nombre; or la différence totale est x; donc A doit avoir fait $15 + \frac{x}{2}$, ou $\frac{30 + x}{2}$ milles, & B doit en avoir fait $15 - \frac{x}{2}$, ou $\frac{30 - x}{2}$ milles; donc la distance où A se trouvoit de D, après avoir atteint B, étoit de $\frac{30 - x}{2}$ milles, qu'il avoit faits en 4 jours, & la distance où B se trouvoit de C, étoit de $\frac{30 + x}{2}$ milles, qu'il pouvoit, suivant le problême, faire en 9 jours; ainsi pour déterminer le nombre de jours qu'ils avoient été en chemin, dites, si A a fait $\frac{30 - x}{2}$ milles depuis D en 4 jours, en combien de jours a-t-il fait $\frac{30 + x}{2}$ milles depuis qu'il est parti de C? & la réponse sera $\frac{4 \times \frac{30 + x}{2}}{\frac{30 - x}{2}} = \frac{4 \times \overline{30 + x}}{30 - x}$; dites ensuite, si B devroit, pour faire $\frac{30 + x}{2}$ milles, c'est-à-dire la distance où il est de C, employer 9 jours, combien de jours a-t-il mis pour faire $\frac{30 - x}{2}$ milles depuis qu'il est parti de D? & la réponse est $\frac{9 \times \overline{30 - x}}{30 + x}$; mais comme ils sont partis tous deux en même tems, & qu'A vient d'atteindre B, ils doivent avoir voyagé le même nombre de jours; donc nous avons cette équation, $\frac{4 \times \overline{30 + x}}{30 - x} = \frac{9 \times \overline{30 - x}}{30 + x}$: multipliant l'un & l'autre membre par $\overline{30 - x}$, vous aurez $4 \times \overline{30 + x} = \frac{9 \times \overline{30 - x} \times \overline{30 - x}}{30 + x}$; multipliant cette nouvelle

équa-

équation par $\overline{30+x}$, vous aurez $4\times\overline{30+x}\times\overline{30+x}=9\times\overline{30-x}\times\overline{30-x}$; mais le produit de $\overline{30-x}\times\overline{30-x}$ eſt le même que celui de $\overline{x-30}\times\overline{x-30}$; car les deux quantités $\overline{30-x}$ & $\overline{x-30}$ ne différent pas davantage l'une de l'autre qu'une quantité affirmative ne fait d'une autre quantité négative égale, & par conſéquent chacune de ces quantités, multipliées par elle-même, doit donner le même produit. Cela étant l'équation peut s'exprimer ainſi, $4\times\overline{x+30}\times\overline{x+30}=9\times\overline{x-30}\times\overline{x-30}$; mais cette équation eſt préciſément la même que celle que nous avons déduite du dernier problême, ce qui prouve, comme nous l'avons remarqué dans l'Art. 121, que différens problêmes peuvent donner la même équation; ainſi les deux racines de cette équation ſeront 6 & 150, comme dans l'Article précédent; & la diſtance entre *C* & *D* doit être de 6 ou bien de 150 milles; mais cette derniére diſtance eſt impoſſible, à cauſe qu'*A*, après avoir paſſé depuis *C* au-delà de *D*, & avoir atteint *B*, n'avoit cependant fait en tout, en ajoûtant ſon chemin à celui de *B*, que 30 milles; ainſi la diſtance entre *C* & *D* doit avoir été de 6 milles; & ce nombre donne la ſolution du problême; car *A*, dans le tems qu'il atteignit *B*, avoit fait 15+3 ou 18 milles, & *B* 15−3 ou 12 milles; donc *A* avoit fait 12 milles au-delà de *D* en 4 jours, & *B* étoit à 18 milles de *C*: diſtance qui, à proportion du chemin qu'il avoit fait, étoit de 9 journées; mais à raiſon de 12 milles en 4 jours, *A* doit avoir fait ſes 18 milles en 6 jours; & à raiſon de 18 milles en 9 jours, *B* doit avoir fait ſes 12 milles en 6 jours; donc depuis le tems de leur départ juſqu'à celui où *A* a joint *B*, ils avoient été en chemin le même nombre de jours, comme le problême l'exige; donc la ſuppoſition, ſur laquelle ce calcul eſt fondé, ſavoir, qu'il y a une diſtance de 6 milles entre *C* & *D* eſt juſte.

N. B. Les ſolutions des deux derniers problêmes, qui viennent d'être données, ſont, à mon avis, les plus naturelles, quoique tant ſoit peu différentes de celles qui les ont précédées.

LEMME.

124. *La ſomme d'une ſuite de quantités en progreſſion Arithmétique ſe trouve, en ajoûtant enſemble le plus grand & le plus petit terme, & en multipliant enſuite la moitié de cette ſomme par le nombre entier des termes, ou toute la ſomme par la moitié du nombre des termes, ou enfin, en multipliant toute la ſomme par le nombre entier des termes, & en prenant enſuite la moitié du produit:* ainſi dans la ſuite 2, 4, 6, 8, 10, 12, où le plus petit terme eſt 2 & le plus grand 12, leur ſomme 14, & le nombre des termes 6; la ſom-

ſomme de tous les termes pris enſemble ſera 7×6, ou 14×3, ou $\frac{14 \times 6}{2}$ $=42$. C'eſt ce qui paroîtra à l'œil, ſi l'on écrit au-deſſus de la ſuite 2, 4, 6, 8, 10, 12, cette même ſuite dans un ordre renverſé, 12, 10, 8, 6, 4, 2: car alors le nombre 2, premier terme de la ſuite inférieure, ajoûté à 12 premier terme de la ſuite d'enhaut (c'eſt-à-dire le plus petit terme & le plus grand pris enſemble) feront 14; ce qui eſt également vrai de tout terme d'une des ſuites ajoûté à ſon terme correſpondant; donc les deux ſuites ajoûtées enſemble ſeront égales au nombre de 14 pris autant de fois qu'il y a de termes dans chaque ſuite, c'eſt-à-dire à 6 fois 14, ou 84; ainſi chaque ſuite ſeule vaudra 42.

12.	10.	8.	6.	4.	2.
2.	4.	6.	8.	10.	12.
14.	14.	14.	14.	14.	14.

Le but de ce lemme eſt d'enſeigner la maniére de trouver la ſomme d'une ſuite en progreſſion Arithmétique dont on ne connoît que le plus grand terme, & le plus petit, avec le nombre des termes: les termes intermédiaires n'étant pas marqués, ou étant en trop grand nombre pour pouvoir en former la ſomme par voye d'addition.

PROBLEME 82.

125. *Un Voyageur* A *part d'un certain endroit, & fait un mille le premier jour, deux milles le ſecond, trois le troiſiéme, quatre le quatriéme, &c., & cinq jours après un autre Voyageur* B *part du même endroit, & va du même côté faiſant douze milles par jour: on demande combien de jours* A *doit être en chemin, & combien de milles il doit faire avant que d'être atteint par* B.

SOLUTION.

J'appelle x le nombre de jours qu'A a été en chemin avant que B l'ait joint; pour exprimer enſuite le nombre des milles qu'il a faits en ce tems, je conſidére qu'en trois jours le nombre des milles parcourus par A eſt $1+2+3$, c'eſt-à-dire que les milles, qu'il fait, ſont en progreſſion Arithmétique; le nombre des termes de cette progreſſion eſt 3, le plus grand terme 3, & le plus petit terme 1; en quatre jours il parcourt une ſuite de termes dont le nombre eſt 4, le plus grand terme 4, & le plus petit 1; ainſi en général, dans un nombre x de jours, il doit parcourir une ſuite de milles en progreſſion Arithmétique, dont le nombre de termes eſt x, le plus grand terme x, & le plus petit terme

terme 1; mais la somme des extrêmes de cette suite est $x+1$, dont la multiplication par x nombre des termes, donne $xx+x$; par le lemme précédent la moitié de cette quantité, savoir $\frac{xx+x}{2}$, sera la somme de la suite, & exprimera par cela même les milles qu'A a faits avant que B l'eût joint: d'un autre côté, si A a voyagé le nombre de jours exprimé par x, B doit avoir voyagé $x-5$ jours, ce qui, à raison de douze milles par jour, donne $12x-60$ pour les milles faits par B dans le tems qu'il joignit A; mais étant tous deux partis du même endroit, il faut nécessairement, dans le tems que B atteint A, qu'ils ayent fait le même nombre de milles; ainsi nous avons cette équation $\frac{xx+x}{2}=12x-60$; donc $xx+x=24x-120$, c'est-à-dire, $xx=23x-120$. Résolvant cette équation par le théorême général de l'Art. 103, nous aurons $A=1$, $B=23$, $C=-120$, $BB=529$, $4AC=-480$, $ss=49$, $s=7$, $\frac{B+s}{2A}=15$, $\frac{B-s}{2A}=8$; donc $x=8$, ou 15. Pour bien trouver la solution du problême par le moyen de ces racines, il faut observer, que le problême est plus limité que l'équation qui en a été déduite; précisément comme si en traduisant une phrase d'une langue en une autre, les termes de la derniére avoient une signification plus étendue que ceux de l'autre: le problême suppose uniquement que B atteint A, au-lieu que dans l'équation il n'est point spécifié si c'est B qui atteint A, ou bien A qui atteint B, après avoir fait le même nombre de milles, à compter depuis leur départ; car A doit aussi atteindre B, pourvu qu'ils continuent leur voyage. Comme B avance d'abord le plus vite, s'ils se joignent, cela ne peut venir que de ce que B atteint A, ce qui n'arrive qu'après qu'A a voyagé 8 jours; si nous supposons qu'ils continuent ensuite leur chemin, B passe A, & le devance pendant quelque tems; mais au bout de 12 jours, A doit avancer plus vite que B, & joindre ce dernier après qu'il a été en chemin 15 jours: ainsi quoique les deux racines 8 & 15 répondent l'une & l'autre à ce qui est exprimé dans l'équation, une seule néanmoins, savoir 8, répondra à la condition du problême. Car il est évident qu'elles satisfont toutes deux à ce qu'exige l'équation.

En 8 jours A fait une suite de milles, dont le nombre de termes est 8, le plus grand terme 8, & le plus petit 1; la somme de cette suite est 36; mais quand A a voyagé 8 jours, B doit en avoir voyagé 3, & avoir fait aussi 36 milles, à raison de 12 milles par jour; donc après qu'A & B ont été 8 jours en chemin, ils doivent nécessairement se trouver en-

femble : outre cela, en 15 jours, *A* doit avoir parcouru une fuite de milles, dont le nombre de termes eft 15, le plus grand terme auffi 15, le plus petit 1, & la fomme 120 milles ; mais quand *A* a voyagé 15 jours, *B* doit en avoir voyagé 10, ce qui, à raifon de 12 milles par jour, fait auffi 120 milles ; donc puifqu'*A* & *B* fe retrouvent de-nouveau, les nombres 8 & 15 répondent également à la fuppofition contenue dans l'équation.

N. B. Si nous avions fuppofé que *B* s'étoit mis en chemin 5 jours après *A*, & n'avoit fait que 10 milles par jour, il n'auroit jamais pu atteindre *A*, deforte qu'en ce cas les deux racines de l'équation feroient devenues impoffibles, comme on peut le voir en réfolvant une équation fondée fur cette fuppofition.

PROBLEME 83.

126. *On demande de partager le nombre de dix en deux parties, qui foient telles que le produit de leur multiplication ajoûté à la fomme de leurs quarrés, faffe foixante-feize.*

SOLUTION.

Les deux parties cherchées font, x & $10-x$.

Le produit de leur multiplication $10x-xx$.

La fomme de leurs quarrés, $2xx-20x+100$.

Le produit de leur multiplication ajoûté à la fomme de leurs quarrés, $\Big\}\; x^2-10x+100=76$.

Ainfi $x=4$ ou 6; mais cette équation fera la même, quelle des deux parties qui foit défignée par x ; donc les deux parties cherchées font 4 & 6.

PROBLEME 84.

127. *On demande deux nombres qui ayent les propriétés fuivantes ; que deux fois le premier, & trois fois le fecond faffent foixante ; & de plus, que deux fois le quarré du premier, & trois fois le quarré du fecond foient égaux à huit cens quarante.*

SOLUTION.

Nommant les deux nombres x & y, nous aurons

1ére, Eq. $2x+3y=60$, &

2de, Eq. $2x^2+3y^2=840$.

La premiére équation, $2x+3y=60$, donne une

3éme, Eq. $x=\frac{60-3y}{2}$; & en élevant les deux membres au quarré cette 4éme, Eq. $xx=\frac{3600-360y+9yy}{4}$.

De

De la seconde équation $2xx + 3yy = 840$, se déduit une

5^{éme}. Eq. $xx = \frac{840 - 3yy}{2}$.

Comparez les deux valeurs de xx dans les deux derniéres équations, & vous aurez $\frac{3600 - 360y + 9yy}{4} = \frac{840 - 3yy}{2}$; multipliez les deux membres par 2 en diminuant de la moitié les dénominateurs, & vous aurez $\frac{3600 - 360y + 9yy}{2} = 840 - 3yy$; donc $3600 - 360y + 9yy = 1680 - 6yy$; donc $3600 - 360y + 15yy = 1680$; donc $15yy - 360y = - 1920$; donc $15yy = 360y - 1920$. Divisant le tout par 15 pour rendre l'équation plus simple, nous aurons $yy = 24y - 128$; donc $y = 8$ ou 16: supposons $y = 8$; alors, puisque par la troisiéme équation $x = \frac{60 - 3y}{2}$, nous aurons $x = 18$; supposons $y = 16$, en ce cas x ou $\frac{60 - 3y}{2} = 6$; ainsi il y a deux paires de nombres, qui satisfont également aux conditions de ce probléme, savoir, 18 & 8, comme aussi 6 & 16. Pour s'en convaincre on n'a qu'à supposer d'abord que les deux nombres sont 18 & 8; deux fois le premier nombre & trois fois le second seront $= 36 + 24 = 60$; deux fois le quarré du premier & trois fois le quarré du second, font $648 + 192 = 840$. La supposition que les deux nombres sont 6 & 16, donne $12 + 48 = 60$, & pour les quarrés $72 + 768 = 840$.

PROBLEME 85.

128. *Trouver quatre nombres en proportion continue, & tels, que la somme des deux termes moyens soit dix-huit, & celle des extrêmes vingt & sept.*

N. B. Quatre nombres sont dits être en proportion continue, quand le premier est au second, comme le second est au troisiéme, & le second au troisiéme, comme le troisiéme est au quatriéme.

SOLUTION.

Nommant les deux termes moyens x & y, sans prétendre déterminer lequel des deux est le plus grand, l'extrême le plus proche de x se trouvera en disant, comme y est à x ainsi x est à $\frac{xx}{y}$; pareillement l'extrême le plus proche de x est à y comme y sera à $\frac{yy}{x}$; ainsi les extrêmes sont $\frac{xx}{y}$ & $\frac{yy}{x}$, & leur somme $\frac{x^3 + y^3}{xy}$; par conséquent les équations fondamentales sont, $x + y = 18$, ou $x = 18 - y$; & $\frac{x^3 + y^3}{xy} = 27$, ou

$x^3 + y^3$

$x^3 + y^3 = 27xy$; mettez à la place de x dans cette équation $18 - y$, & la valeur de x^3 exprimée par le cube de $18 - y$, & vous aurez $x^3 + y^3 = y^3 + 5832 - 972y + 54yy - y^3$; c'est-à-dire, $x^3 = 5832 - 972y + 54yy - y^3$. Outre cela $27xy$ ou $27y \times \overline{18 - y} = 486y - 27yy$; donc $5832 - 972y + 54yy = 486y - 27yy$; transposez $486y - 27yy$, & vous aurez $81yy - 1458y + 5832 = 0$; divisant le tout par 81, ce qui peut se faire sans fraction, le quotient sera $yy - 18y + 72 = 0$. Cette équation, résolue par le théorême général, ou de quelque autre maniére, donne $y = 6$, & 12 ; ainsi l'extrême le plus proche de 6 doit être 3, & le plus proche de 12 doit être 24 ; par conséquent les nombres sont 3, 6, 12, 24, ou 24, 12, 6, & 3.

PROBLEME 86.

129. *Il y a trois nombres en proportion continue, dont la somme est dix-neuf, & la somme de leurs quarrés cent trente-trois : Quels sont ces nombres ?*

SOLUTION.

J'appelle les trois nombres x, y, & z. Puisque par la premiére condition x est à y comme y est à z, en multiplant les extrêmes & les moyennes, nous aurons $yy = xz$; de plus, par la seconde condition du problême, $x + y + z = 19$, & $19 - y = x + z$. Elevant les deux membres au quarré, $361 - 38y + yy = xx + zz + 2xz$; si l'on retranche d'un des membres de cette équation yy, & de l'autre la quantité xz égale à ce quarré, il restera $361 - 38y = x^2 + xz + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 133$; par la troisiéme condition du problême ayant donc $361 - 38y = 133$, il sera facile de trouver que $y = 6$, & $19 - y$, ou la somme des extrêmes $= 13$; ainsi le problême proposé se trouve réduit à ceci, *De trois nombres en proportion continue, dont six est le terme moyen, & treize la somme des extrêmes, trouver la valeur de chaque extrême :* ce problême est du même genre que celui de l'Art. 112, & étant résolu, donne 4 & 9 pour les extrêmes ; ainsi les trois nombres cherchés sont 4, 6 & 9, ou 9, 6 & 4.

PROBLEME 87.

130. *Trouver deux nombres qui soient tels, que leur différence multipliée par la différence de leurs quarrés fasse trente-deux, mais que leur somme multipliée par la somme de leurs quarrés soit égale à deux cens soixante-douze.*

So-

SOLUTION.

Nommant les deux nombres cherchés x & y, la premiére équation fondamentale sera $\overline{x-y}\times\overline{x^2-y^2}$, ou $\overline{x-y}\times\overline{x-y}\times\overline{x+y}$, ou $\overline{x^2-2xy+y^2}\times\overline{x+y}=32$; donc

$$1^{ére}, \text{Eq. } x^2-2xy+y^2=\frac{32}{x+y}.$$

La seconde équation fondamentale est, $\overline{x+y}\times\overline{x^2+y^2}=272$; donc

$$2^{de}, \text{Eq. } x^2+y^2=\frac{272}{x+y}.$$

De la seconde équation prise deux fois retranchez la premiére c'est-à-dire de $2x^2 \quad * \quad +2y^2=\frac{544}{x+y}$

retranchez $x^2-2xy+y^2=\frac{32}{x+y}$

il restera $x^2+2xy+y^2=\frac{512}{x+y}$,

c'est-à-dire, $\overline{x+y}^2=\frac{512}{x+y}$; donc $\overline{x+y}^3=512$, & $x+y=\sqrt[3]{512}=8$: ainsi nous avons trouvé la somme des deux nombres cherchés, savoir 8. Voici comment on pourroit trouver leur différence par le moyen de la premiére équation; $x^2-2xy+yy=\frac{32}{x+y}$, c'est-à-dire, $\overline{x-y}^2=\frac{32}{8}=4$; donc $x-y$, ou la différence cherchée est égale à 2; & le problême proposé se réduit à ceci: *Ayant deux nombres* x & y, *dont la somme est huit & la différence deux, trouver ces nombres*; par l'Art. 26. x sera $=5$, & $y=3$.

N. B. Après avoir trouvé $x+y$, somme des deux nombres $=8$, nous aurions pu trouver la somme de leurs quarrés par la seconde équation, $x^2+y^2=\frac{272}{x+y}=\frac{272}{8}=34$; & le problême auroit été réduit à ceci, *Trouver deux nombres dont la somme est huit, & dont la somme des quarrés est trente-quatre.* Ce problême, exprimé Algébriquement, donne une équation du second degré, semblable à celle de l'Art. 113, & dont les deux racines sont 5 & 3.

PROBLEME 88.

131. *Trouver deux nombres, dont la différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés fasse quatorze, & dont la somme ajoûtée à la somme de leurs quarrés fasse vingt & six.*

SOLUTION.

Appellez les deux nombres cherchés x & y, & vous aurez les deux équations suivantes;

1ére, Eq. $x - y + x^2 - y^2 = 14$.

2de, Eq. $x + y + x^2 + y^2 = 26$.

Ajoûtant ensemble les deux équations, nous aurons $2xx + 2x = 40$, $xx + x = 20$, & $x = +4$, ou -5; d'un autre côté, retranchez la premiére équation de la seconde, & il restera $2yy + 2y = 12$, $yy + y = 6$, & $y = +2$, ou -3; & comme ces deux valeurs de y sont indépendantes des valeurs de x, il est clair que chacune des valeurs de x peut être associée à chacune des valeurs de y; ce qui ne donnera pas moins de quatre paires de nombres, qui satisferont également aux conditions des équations, savoir, $+4$ & $+2$, $+4$ & -3, -5 & $+2$, -5 & -3; mais il n'y a que la premiére paire, consistant en nombres affirmatifs, qui soit propre à bien résoudre le probléme; $2 + 12 = 14$; outre cela la somme de 4 & 2 est 6, la somme de leurs quarrés 20, & $6 + 20 = 26$: voyons néanmoins comment les autres paires satisfont aux conditions des équations; faites $x = 4$, y, c'est-à-dire, $+y = -3$, & vous aurez $-y = +3$; ainsi $x - y = 4 + 3 = 7$, $x^2 - y^2 = 16 - 9 = 7$, & $7 + 7 = 14$; de plus $x + y = 4 - 3 = 1$, & $x^2 + y^2 = 16 + 9 = 25$, & $1 + 25 = 26$: faites ensuite $x = -5$, & $y = +2$, vous aurez alors $x - y = -5 - 2 = -7$, $x^2 - y^2 = 25 - 4 = 21$, & $-7 + 21 = 14$; de plus, $x + y = -5 + 2 = -3$, & $x^2 + y^2 = 25 + 4 = 29$, & $-3 + 29 = 26$: enfin, faites $x = -5$, & $y = -3$, & vous aurez $x - y = -5 + 3 = -2$, & $x^2 - y^2 = 25 - 9 = 16$, & $-2 + 16 = 14$; de plus, $x + y = -5 - 3 = -8$, & $x^2 + y^2 = 25 + 9 = 34$, & $-8 + 34 = 26$.

PROBLEME 89.

132. *Trouver deux nombres, qui ajoûtés ensemble, ou multipliés l'un par l'autre, donnent la même somme, laquelle, ajoûtée à la somme de leurs quarrés, soit égale à douze.*

SOLUTION.

Appellant x & y les deux nombres cherchés, la premiére équation fondamentale sera $x + y = xy$; la seconde, $x + y + x^2 + y^2 = 12$; la premiére de ces équations donne par transposition $yx - x = y$; mais $yx - x$ est le produit de $\overline{y-1} \times x$ ou de $x \times \overline{y-1}$; donc $x \times \overline{y-1} = y$, & $x = \frac{y}{y-1}$. En substituant cette valeur de x dans la seconde équa-

tion

tion fondamentale, nous aurons une équation de quatre dimensions, dont la solution dépend de certaines règles que nous n'avons point données jusqu'ici; pour y suppléer il est bon d'avoir recours à quelque autre artifice. Par exemple, appellons la somme des deux nombres cherchés z, qui par la supposition sera aussi le produit de leur multiplication; & puisque ce produit z ajoûté à la somme de leurs quarrés est égal à 12, la somme de leurs quarrés sera $12-z$; mais personne n'ignore, que si à la somme des quarrés de deux nombres quelconques est ajoûté le double de leur produit, on a le quarré de leur somme; donc $12-z+2z$, ou $12+z=zz$: équation, dont la solution donne $z=+4$ &c.; ainsi la question se trouve à-présent réduite à ceci: *Trouver deux nombres dont la somme est quatre, & dont le produit est quatre aussi.* Appellez les nombres x & $4-x$, & vous aurez $4x-xx=4$, & en changeant les signes $xx-4x=-4$; ajoûtant $+4$ dans chaque membre de cette équation pour compléter le quarré $xx-4x+4=0$; & tirant la racine quarrée $x-2=\pm 0$; ainsi $x=2$, ou 2, car les racines sont égales; donc 2 & 2 sont les nombres cherchés; car $2+2=4=2+2$; & outre cela, 4 somme de $2+2$, & 8 somme de leurs quarrés, font ensemble 12.

COROLLAIRE.

Nous pouvons inférer de la premiére tentative que nous avons faite pour résoudre ce problême, qu'en faisant un nombre quelconque égal à y, ces deux nombres y & $\frac{y}{y-1}$ auront toujours cette propriété, que leur somme sera égale à leur produit; par exemple, si $3=y$, & par conséquent $\frac{3}{2}=\frac{y}{y-1}$, nous aurons $3+\frac{3}{2}=4\frac{1}{2}$, & $3\times\frac{3}{2}$ ou $\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$; d'où il suit, que ce problême ne sauroit avoir d'autre solution en nombres entiers que celle que nous avons donnée.

PROBLEME 90.

133. *On demande deux nombres dont la somme ajoûtée au produit de leur multiplication fasse trente-quatre, & dont la même somme retranchée de la somme de leurs quarrés laisse quarante-deux.*

SOLUTION.

Pour rendre le calcul plus simple, appellez la somme des deux nombres cherchés z. Puisque cette somme ajoûtée au produit de leur multiplication fait 34, le produit en question sera $34-z$; mais la somme z re-

retranchée de la ſomme de leurs quarrés, laiſſe 42; donc la ſomme de leurs quarrés eſt $42+z$; ajoûtez à cette ſomme le double du produit de leur multiplication $68-2z$, & vous aurez $110-z=zz$; par conſéquent $z=+10$, &c. & $34-z=24$; ainſi la queſtion ſe trouve réduite à ceci, *Quels ſont les nombres dont la ſomme eſt dix, & le produit de leur multiplication vingt & quatre?* par l'Art. 111. les deux nombres cherchés ſont 4 & 6.

Ceux qui ſeront curieux de voir d'autres queſtions de cette nature, pourront conſulter le Commentaire de *Bachet* de Meziriac ſur la 33ème queſtion du premier Livre d'Arithmétique de *Diophante*.

N. B. Après avoir traité des équations du ſecond degré je devrois naturellement paſſer à d'autres équations d'un genre plus élevé: cependant je prendrai la liberté de manquer pour cette fois aux règles de la méthode, dans le deſſein de revenir dans la ſuite à ces équations, & d'expliquer diſtinctement ce qui y a rapport. Mais avant tout j'ai cru devoir offrir aux yeux de mes Lecteurs divers objets plus inſtructifs & plus importans.



ELE-

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE IV.

Des Problêmes généraux, & des Théorêmes généraux qu'on peut en déduire; avec la maniére d'appliquer & de démontrer ces Théorêmes.



Le dessein de ce quatriéme Livre marqué plus en détail.

Art. 134. JUsqu'ici nôtre jeune Analyste ne s'est occupé que d'une espéce d'Algébre assez limitée, dans laquelle les quantités inconnues étoient simplement exprimées par des lettres; mais s'il souhaite de raisonner d'une maniére abstraite sur les problêmes qu'il a résolus, & d'en tirer des conclusions générales, il faut qu'il désigne par des lettres non seulement les quantités inconnues, mais aussi celles dont il fait la valeur, afin que les problêmes soient proposés & résolus indéterminément. Par ce moyen, il obtient, d'un côté des réponses générales, qui sont préférables aux réponses particuliéres, en ce qu'elles peuvent s'appliquer à une infinité de cas; & d'un autre côté, il peut démontrer son opération; ce qui non seulement vérifie son *Analyse*, mais le familiarise aussi de plus en plus avec les opérations de l'Arithmétique symbolique ou spécieuse. Nous avons déjà donné à cet égard un exemple suffisant, dans notre théorême général de l'Art. 103; ainsi tout ce qui nous reste à faire est de reprendre quelques problêmes déjà résolus, & de montrer comment on peut les résoudre en termes généraux.

Probleme I. (Voyez Art. 26.)

135. *On demande deux nombres tels, que leur somme soit* a, *& leur différence* b.

Solution.

Si l'on appelle le plus petit nombre x, le plus grand sera $x+b$, & leur somme $2x+b=a$; ainsi $2x=a-b$, & x (le plus petit nombre) sera $\frac{a-b}{2}$; d'un autre côté $x+b$ (le plus grand nombre) sera $\frac{a-b}{2}+\frac{b}{1}=\frac{a-b+2b}{2}=\frac{a+b}{2}$; de sorte que le plus grand nombre se trou-

trouvera être $\frac{a+b}{2}$, & le plus petit $\frac{a-b}{2}$. Dans cette expression les grandeurs a & b restent indéterminées, jusqu'à ce qu'il soit question d'appliquer le problême général à quelque cas particulier; alors les quantités a & b seront non seulement déterminées, mais le problême pourra être résolu par le théorême général sans la moindre *Analyse*. Par exemple, si l'on propose, comme dans l'Art. 26, de trouver deux nombres dont la somme soit 48, & la différence 14, il est clair que dans le problême général a répond à 48 dans le cas particulier, & que b répond à 14; donc $\frac{a+b}{2}$ (ou le plus grand nombre) $=\frac{48+14}{2}=\frac{62}{2}=31$, & $\frac{a-b}{2}$ (ou le plus petit nombre) $=\frac{48-14}{2}=\frac{34}{2}=17$; si bien que les deux nombres cherchés sont 31 & 17. Si, par exemple encore, la somme des deux nombres avoit été 35, & leur différence 9, a & b auroient été d'autres nombres, & $\frac{a+b}{2}$ (ou le plus grand nombre) $=22$ & $\frac{a-b}{2}$ (ou le plus petit nombre) $=13$.

Ces théorêmes peuvent se traduire du langage Algébraïque en toute autre langue; mais cette peine est assez inutile dès qu'on est tant soit peu versé dans l'Arithmétique spécieuse; car en fait de clarté le langage Algébraïque surpasse, à mon avis, tous les autres. Le problême précédent, & sa solution peuvent s'énoncer ainsi en François.

PROBLEME.

La somme & la différence de deux nombres quelconques étant données, on demande les nombres mêmes.

SOLUTION. 1ment, *Ajoûtez la différence à la somme, & la moitié du tout sera le plus grand nombre.* 2ment, *Retranchez la différence de la somme, & la moitié du reste sera le plus petit nombre.*

Cette traduction est surement fidéle: car qu'est-ce que $\frac{a+b}{2}$ sinon la moitié de la somme & de la différence? Et qu'est-ce que $\frac{a-b}{2}$ sinon la moitié du reste, après que la différence a été retranchée de la somme?

Examinons à-présent le théorême tel qu'il est exprimé en termes généraux, & essayons s'il répond aux conditions du problême énoncé en lettres. Il s'agissoit de trouver deux nombres dont la somme fût a, & la différence b; & la réponse a été que le plus grand nombre étoit $\frac{a+b}{2}$ & le plus petit $\frac{a-b}{2}$. Il n'y a aucun lieu de douter que cette

réponse

réponse ne soit vraye; pourvu qu'on ajoûte simplement les nombres ensemble, ou qu'on les retranche l'un de l'autre; car ajoûtant $\frac{a+b}{2}$ à $\frac{a-b}{2}$, leur somme sera $\frac{2a}{2}$ ou a, ce qui satisfait à la premiére condition du problême; & si $\frac{a-b}{2}$ est retranché de $\frac{a+b}{2}$, le reste sera $\frac{2b}{2}=b$, ce qu'exigeoit la seconde condition.

C'est ce qu'on appelle une démonstration synthétique, démonstration qui ne prouve pas moins bien la vérité du théorême auquel elle est rélative, que l'*Analyse* qui a servi à trouver le théorême; avec cette différence néanmoins, que la démonstration synthétique fait voir seulement que la proposition est vraye; au-lieu que la démonstration analytique indique de-plus pourquoi elle est vraye, & développe tout le mystére. Les démonstrations synthétiques demandent ordinairement moins de principes que les démonstrations analytiques, comme on peut s'en convaincre en comparant les deux démonstrations telles qu'elles se trouvent dans l'exemple que nous venons de donner; & voilà, si je ne me trompe, pourquoi les Anciens, généralement parlant, ont préféré les démonstrations synthétiques; non qu'ils tâchassent de cacher leur *Analyse*, comme on l'a prétendu; mais parce que ce genre de démonstration suppose moins de principes, & qu'outre cela les principes sur lesquels on se fonde, sont plus connus.

PROBLEME 2.

136. *On demande trois nombres qui soient tels, que la somme du premier & du second soit* a, *celle du premier & du troisiéme* b, *& celle du second & du troisiéme* c.

SOLUTION.

Mettez x pour le premier nombre cherché, alors le second sera $a-x$, puisque le premier nombre & le second ajoûtés ensemble font a, par la même raison le troisiéme nombre sera $b-x$; ajoûtez ensemble le second nombre & le troisiéme, & vous aurez $a+b-2x=c$; donc $2x+c=a+b$; donc $2x=a+b-c$; & x, (ou le premier nombre) $=\frac{a+b-c}{2}$; retranchez le premier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ de a, ou, ce qui revient au même, ajoûtez $\frac{-a-b+c}{2}$ à a, & vous aurez le second nombre $=\frac{-a-b+c}{2}+\frac{a}{1}=\frac{-a-b+c+2a}{2}=\frac{a-b+c}{2}$; de plus retranchez le premier

mier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ de b, & vous aurez le troisiéme nombre égal à $\frac{-a-b+c}{2}+\frac{b}{1}=\frac{-a+b+c}{2}$; ainsi nous avons les trois nombres cherchés, savoir,

Le premier, $\frac{a+b-c}{2}$,

Le second, $\frac{a-b+c}{2}$,

Le troisiéme, $\frac{-a+b+c}{2}$.

Pour appliquer cette solution générale à quelque cas particulier, je ferai usage du problême de l'Art. 42, où il a été question de trouver trois nombres tels, que la somme du premier & du second fassent 60, celle du premier & du troisiéme 80, & celle du second & du troisiéme 92: en ce cas il est évident que $a=60$, $b=80$, & $c=92$; donc $\frac{a+b-c}{2}$ ou le premier nombre sera 24; $\frac{a-b+c}{2}$ ou le second nombre sera 36; & $\frac{-a+b+c}{2}$ ou le troisiéme nombre sera 56: nombres, qui répondent exactement aux conditions du problême. Mais pour faire voir que les théorêmes que nous venons d'indiquer sont généraux, nous en donnerons la démonstration synthétique que voici.

1ment, Le premier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ & le second $\frac{a-b+c}{2}$ ajoûtés ensemble font $\frac{2a}{2}$ ou a, comme l'exige la premiére condition.

2ment, Le premier nombre $\frac{a+b-c}{2}$ & le troisiéme $\frac{-a+b+c}{2}$ ajoûtés ensemble font $\frac{2b}{2}$ ou b, ce qui étoit requis par la seconde condition.

Enfin, Le second nombre $\frac{a-b+c}{2}$, & le troisiéme $\frac{-a+b+c}{2}$ ajoûtés ensemble font $\frac{2c}{2}$ ou c, conformément à la derniére condition.

Ce problême est susceptible d'une solution plus élégante. Désignez par s la somme inconnue des trois nombres cherchés, alors si c, somme du second nombre & du troisiéme, est retranché de s, somme de tous les trois nombres, il restera le premier nombre égal à $s-c$; pareillement ôtant b, somme du premier nombre & du troisiéme, de s, il restera le second nombre égal à $s-b$; enfin, si l'on retranche a, somme

me du premier nombre & du second, de s, on aura le troisiéme nombre égal à $s-a$; ajoûtez ensemble ces trois nombres, savoir $s-c$, $s-b$, & $s-a$, & la somme sera $3s-a-b-c$; mais la somme est s, par la supposition; donc $3s-a-b-c=s$; & $s=\frac{a+b+c}{2}$; ce qui donne le théorême suivant:

Faites $\frac{a+b+c}{2}=s$; *cela étant, si l'on retranche de* s *chacun des trois nombres* a, b, c, *en commençant par le dernier, & ainsi de suite, les trois restes* $s-c$, $s-b$ & $s-a$ *seront les trois nombres cherchés, rangés dans l'ordre marqué par le problême.* Si par exemple $a=60$, $b=80$, & $c=92$, comme ci-dessus, nous aurons $\frac{a+b+c}{2}$ ou $s=116$; donc le premier nombre est $116-92$ ou 24, le second $116-80$ ou 36, & le troisiéme $116-60$ ou 56.

SCHOLIE.

On demande trois nombres, qui ayent les propriétés suivantes; que le produit du premier & du second soit a, *celui du premier & du troisiéme* b, *& enfin celui du second & du troisiéme* c.

SOLUTION.

Appellez le produit de tous les trois nombres p; cela étant, puisque c est le produit des deux derniers, nous aurons le premier nombre égal à $\frac{p}{c}$; par la même raison le second nombre est égal à $\frac{p}{b}$, & le troisiéme à $\frac{p}{a}$, & le produit de tous les trois $\frac{p^3}{abc}=p$; ainsi $p^2=abc$ & $p=\sqrt{abc}$.

DEMONSTRATION.

$\frac{p}{c}\times\frac{p}{b}$, ou le produit du premier nombre & du second, est $\frac{p^2}{bc}=\frac{abc}{bc}=a$; & ainsi du reste.

PROBLEME 3.

137. *On demande deux nombres qui ayent pour différence* b, *&* a *pour différence de leurs quarrés.*

SOLUTION.

Si l'on appelle le plus petit nombre x, & par conséquent le plus grand $x+b$, le quarré du plus petit nombre sera xx, celui du plus grand

$xx+2bx+bb$, & la différence de ces quarrés $2bx+bb=a$; ainsi $2bx=a-bb$, & x, (le petit nombre) $=\frac{a-bb}{2b}$; donc $x+b$ (le plus grand nombre) $=\frac{a-bb}{2b}+\frac{b}{1}=\frac{a-bb+2bb}{2b}=\frac{a+bb}{2b}$.

Pour appliquer cette solution générale à un cas particulier, supposons qu'on demande deux nombres, qui ayent pour différence 4, & pour différence de leurs quarrés 112: alors $a=112$, $b=4$, $bb=16$, $\frac{a-bb}{2b}=12$ $\frac{a+bb}{2b}=16$; donc les nombres sont 12 & 16. En voici la démonstration générale: si l'on retranche le plus petit nombre $\frac{a-bb}{2b}$ du plus grand $\frac{a+bb}{2b}$, leur différence sera $\frac{2bb}{2b}$ ou b, conformément à la premiére condition du problême; de-plus, le quarré du plus petit nombre $\frac{a-bb}{2b}$ est $\frac{aa-2abb+b^4}{4bb}$, & le quarré du plus grand $\frac{a+bb}{2b}$ est $\frac{aa+2abb+b^4}{4bb}$; retranchez le premier de ces quarrés du second, & vous aurez leur différence $\frac{4abb}{4bb}=a$, conformément à la seconde condition.

PROBLEME 4.

138. *Soient* r & s *deux multiplicateurs donnés, dont* r *est le plus grand; on demande de partager un nombre donné comme* a *en deux parties, tellement que le produit de la plus grande partie par le plus petit multiplicateur soit égal au produit de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur.*

SOLUTION.

Si l'on appelle la plus grande partie x, & la plus petite $a-x$, le produit du plus petit multiplicateur par la plus grande partie sera sx, & celui de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur sera $ar-rx$; mais suivant le problême ces produits doivent être égaux; donc $sx=ar-rx$, & $rx+sx=ar$; mais $rx+sx=x\times\overline{r+s}$; donc $x\times\overline{r+s}=ar$; & x (la plus grande des parties cherchées) $=\frac{ar}{r+s}$; donc $a-x$ (la plus petite des parties) $=\frac{a}{1}-\frac{ar}{r+s}=\frac{ar+as-ar}{r+s}=\frac{as}{r+s}$; si bien que la plus grande partie est $\frac{ar}{r+s}$, & la plus petite $\frac{as}{r+s}$.

L'Ar-

L'APPLICATION.

Pour appliquer cette formule à un exemple, ſuppoſons qu'on veuille partager 84 en deux parties, tellement qu'une des parties priſe cinq fois ſoit égale à ſept fois l'autre: ici $a=84$, r le plus grand multiplicateur $=7$, $s=5$, $\frac{ar}{r+s}=\frac{7\times 84}{12}=49$, $\frac{as}{r+s}=\frac{5\times 84}{12}=35$; donc la plus grande partie eſt 49 & la plus petite 35; & ces parties ſatisfont aux conditions du problême; car premiérement, $49+35=84$; & ſecondement, $49\times 5=245=35\times 7$. Par exemple encore, s'il avoit été queſtion de partager 99 en deux parties, tellement que les $\frac{2}{3}$ de l'une fuſſent égaux aux $\frac{4}{7}$ de l'autre, nous aurions eu $a=99$, $r=\frac{4}{7}$, $s=\frac{2}{3}$, $r+s=\frac{22}{17}$, $\frac{r}{r+s}=\frac{\frac{4}{7}}{\frac{22}{17}}=\frac{6}{11}$, $\frac{s}{r+s}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{22}{17}}=\frac{5}{11}$, $\frac{ar}{r+s}=99\times\frac{6}{11}=54$, $\frac{as}{r+s}=99\times\frac{5}{11}=45$; de ſorte que les deux parties ſont 54 & 45; ce qui eſt vrai; car premiérement, $54+45=99$; & ſecondement, $\frac{2}{3}$ de $54=36=\frac{4}{5}$ de 45.

Il eſt bon d'obſerver au ſujet de la démonſtration de cette ſolution générale, qu'il y a dans ce problême deux conditions; premiérement, que les deux parties, ajoûtées enſemble, font a; & ſecondement, que le produit de la plus grande partie par le plus petit multiplicateur doit être égal à celui de la plus petite partie par le plus grand multiplicateur; par rapport à la premiére condition, il eſt certain que les parties $\frac{ar}{r+s}$ & $\frac{as}{r+s}$ ajoûtées enſemble font $\frac{ar+as}{r+s}$; mais $ar+as=a\times\overline{r+s}$; donc $\frac{ar+as}{r+s}=a\times\frac{r+s}{r+s}=a\times 1=a$: pour ce qui concerne la ſeconde condition, ſi la plus grande partie $\frac{ar}{r+s}$, eſt multipliée par s, le plus petit multiplicateur, le produit ſera $\frac{ars}{r+s}$; & d'un autre côté, ſi la plus petite partie $\frac{as}{r+s}$ eſt multipliée par r, le plus grand multiplicateur, le produit ſera pareillement $\frac{ars}{r+s}$; ainſi les deux produits ſont égaux, comme l'exige le problême; & les deux conditions ſe trouvent remplies. C. Q. F. D.

N. B. Si l'on vouloit exprimer par des mots le théorême précédent, on pourroit le faire ſans peine, & cela d'une maniére qui porteroit pour ainſi dire avec elle ſa démonſtration; car par la régle de trois, $r+s$ eſt à r comme a eſt à $\frac{ar}{r+s}$; & $r+s$ eſt à s comme a eſt à $\frac{as}{r+s}$; donc, *comme la ſomme des deux multiplicateurs eſt au plus grand multiplicateur ou au plus*

plus petit, ainsi la somme des deux parties cherchées, est à la plus grande partie ou à la plus petite: & cela est très-évident; car si $\overline{r+s}$ avoit été le nombre à partager, les parties auroient certainement été $r+s$; par conséquent si un nombre plus grand ou plus petit que $\overline{r+s}$ doit être partagé, les parties seront nécessairement plus grandes ou plus petites que r & s dans la même proportion.

PROBLEME 5.

139. *Que* r *&* s *soient deux multiplicateurs donnés, &* r *le plus grand; on demande de partager un nombre donné comme* a *en deux parties, tellement que* r *fois une partie, plus* s *fois l'autre partie, fassent le nombre donné* b.

SOLUTION.

Appellant x la partie qui doit être multipliée par r, & par conséquent $a-x$ l'autre partie qui doit être multipliée par s, les produits seront rx & $as-sx$, & leur somme $rx+as-sx=b$; donc $rx-sx=b-as$, c'est-à-dire, $x\times\overline{r-s}=b-as$; donc x (la partie qui doit être multipliée par r) $=\frac{b-as}{r-s}$; donc $a-x$ (la partie qui doit être multipliée par s) $=\frac{a}{1}-\frac{b+as}{r-s}=\frac{ar-as-b+as}{r-s}=\frac{ar-b}{r-s}$.

L'APPLICATION.

Si l'on vouloit partager 20 en deux parties, tellement que trois fois une des parties & cinq fois l'autre fissent ensemble 84, nous aurions $a=20$, $b=84$, $r=5$, $s=3$, $as=60$, $b-as=24$, $\frac{b-as}{r-s}$ (ou la partie à multiplier par 5) $=\frac{24}{2}=12$, $ar=100$, $ar-b=16$, $\frac{ar-b}{r-s}$ (ou la partie à multiplier par 3) $=\frac{16}{2}=8$; donc les parties cherchées sont 8 & 12; car premiérement $8+12=20$; & en second lieu trois fois $8+5$ fois $12=84$.

Par exemple encore: s'il falloit partager 100 en deux parties telles que les $\frac{3}{4}$ de l'une retranchés des $\frac{5}{6}$ de l'autre laissent 39, il seroit nécessaire d'abord d'observer, que retrancher les $\frac{3}{4}$ d'une quantité de quelque autre quantité du même genre, est la même chose qu'ajoûter à cette derniére quantité $\frac{-3}{4}$ de l'autre; ainsi ce problême peut s'exprimer ainsi: *partager cent en deux parties telles, que* $\frac{-3}{4}$ *de l'une ajoûtés à* $\frac{5}{6}$ *de*

l'autre

l'autre fassent trente-neuf. Ici $a=100$, $b=39$, $r=\frac{5}{6}$, $s=\frac{-3}{4}$, $r-s=\frac{5}{6}+\frac{3}{4}=\frac{19}{12}$, $as=\frac{-300}{4}=-75$, $b-as=39+75=114$, $\frac{b-as}{r-s}=\frac{114}{\frac{19}{12}}=72$, $ar=\frac{500}{6}=\frac{250}{3}$, $ar-b=\frac{250}{3}-\frac{39}{1}=\frac{133}{3}$, $\frac{ar-b}{r-s}=\frac{\frac{133}{3}}{\frac{19}{12}}=28$; si bien que les deux parties sont 28 & 72; car $28+72=100$; outre cela $\frac{3}{4}$ de 28, c'est-à-dire 21, retranchés de $\frac{5}{6}$ de 72, c'est-à-dire de 60, laissent 39.

DEMONSTRATION GENERALE.

Les deux parties $\frac{ar-b}{r-s}$ & $\frac{b-as}{r-s}$ ajoûtées ensemble font $\frac{ar-b+b-as}{r-s}=\frac{ar-as}{r-s}=a\times\frac{r-s}{r-s}=a$: d'un autre côté, la partie $\frac{b-as}{r-s}$ étant multipliée par r, son multiplicateur, donne $\frac{br-ars}{r-s}$, & l'autre $\frac{ar-b}{r-s}$, multipliée par s donne $\frac{ars-bs}{r-s}$; ajoûtez ensemble ces deux produits, & vous aurez $\frac{br-ars+ars-bs}{r-s}=\frac{br-bs}{r-s}=b$. C. Q. F. D.

Si quelqu'un de mes Lecteurs me trouve trop concis dans les solutions de ces problêmes généraux, il fera bien d'avoir recours aux problêmes particuliers contenus dans les articles que j'indiquerai, où ces mémes problêmes sont résolus d'une maniére plus étendue. Pour ce qui concerne l'application des solutions générales au cas particuliers, il y a lieu de présumer que ceux qui se sont attachés à bien entendre ce qui a précédé, n'y trouveront aucune difficulté; ainsi je leur laisserai desormais ce soin, horsmis dans quelques occasions où mon secours pourroit leur être nécessaire.

PROBLEME 6. (Voyez Art. 35.)

140. *Quelqu'un ayant rencontré un certain nombre de Pauvres, donne à chacun d'eux* p *sous & se trouve avoir* a *sous de reste; mais s'il leur avoit voulu donner à chacun* q *sous, il auroit trouvé qu'il lui manquoit pour cela* b *sous. Combien y avoit-il de Pauvres?*

SOLUTION.

Le nombre des Pauvres, x.
Sous donnés, px.
Sous en tout, $px+a$.



Les sous qui auroient été donnés dans l'autre supposition, qx.

Une autre expression pour désigner le nombre des sous en tout $qx-b$.

Eq. $qx-b=px+a$; donc $qx-px-b=a$; donc $qx-px=a+b$; donc x (nombre des Pauvres) $=\frac{a+b}{q-p}$.

DEMONSTRATION.

Si le nombre des Pauvres est $\frac{a+b}{q-p}$, le nombre des sous donnés sera $\frac{ap+bp}{q-p}$, & le nombre des sous en tout $\frac{ap+bp}{q-p}+\frac{a}{1}=\frac{ap+bp+aq-ap}{q-p}$ $=\frac{aq+bp}{q-p}$: d'un autre côté, le nombre des sous qui auroient été donnés dans la seconde supposition est $\frac{aq+bq}{q-p}$; par conséquent l'autre expression, qui désigne le nombre des sous en tout sera $\frac{aq+bq}{q-p}-\frac{b}{1}$ $=\frac{aq+bp}{q-p}$; & la parfaite convenance entre ce calcul & le calcul précédent prouve que le nombre des Pauvres a été bien assigné.

PROBLEME 7. (Voyez Art. 64.)

141. *On demande de partager le nombre donné* a *en deux parties, qui soient l'une à l'autre comme* r *à* s.

SOLUTION.

Les deux parties cherchées x & $a-x$.

Proportion, x est à $a-x$ comme r à s.

Equation, $sx=ar-rx$; donc $rx+sx=ar$; donc x (ou le premier nombre) $=\frac{ar}{r+s}$; donc $a-x$ (ou le second nombre) $=\frac{a}{1}-\frac{ar}{r+s}$ $=\frac{as}{r+s}$; donc les deux nombres sont $\frac{ar}{r+s}$ & $\frac{as}{r+s}$.

DEMONSTRATION.

1ment, Les deux nombres $\frac{ar}{r+s}$ & $\frac{as}{r+s}$ ajoûtés ensemble font $\frac{ar+as}{r+s}=a$.

2ment, Le premier nombre $\frac{ar}{r+s}$ est au second $\frac{as}{r+s}$, comme ar est à as; l'action d'effacer un dénominateur commun à deux fractions étant la même que si l'on avoit multiplié chacune de ces fractions par leur dénomina-

nominateur: or perſonne n'ignore que la multiplication de deux quantités par un même nombre, ne change point la proportion qui ſe trouve entre elles: outre cela, ar eſt à as (diviſant l'une & l'autre quantité par a) comme r à s; car tout le monde ſait qu'un même diviſeur n'altére pas davantage les différentes quantités, qui ont entre elles une certaine proportion, que ne feroit un même multiplicateur: puis donc que le premier nombre eſt au ſecond comme ar à as, & que ar eſt à as comme r à s, il s'enſuit que le premier nombre eſt au ſecond comme r à s. C. Q. F. D.

PROBLEME 8. (Voyez Art. 66.)

142. *On demande un nombre, qui étant ajoûté ſéparément à deux nombres donnés, dont* a *eſt le plus grand &* b *le plus petit, faſſe deux ſommes, dont la première ſoit à la ſeconde comme* r *à* s*; ainſi il faut que* r *ſoit plus grand que* s.

SOLUTION.

Le nombre cherché, x.

Proportion, $a+x$ eſt à $b+x$ comme r à s.

Equation, $br+rx=as+sx$; donc $br+rx-sx=as$; donc $rx-sx=as-br$; donc $x=\frac{as-br}{r-s}$.

DEMONSTRATION.

Le nombre $\frac{as-br}{r-s}$ ajoûté au nombre a donne $\frac{ar-br}{r-s}$; & le même nombre étant ajoûté à b donne $\frac{as-bs}{r-s}$; or $\frac{ar-br}{r-s}$ eſt à $\frac{as-bs}{r-s}$ comme $ar-br$ eſt à $as-bs$, c'eſt-à-dire, comme $r\times\overline{a-b}$ eſt à $s\times\overline{a-b}$, c'eſt-à-dire, comme r à s. C. Q. F. D.

SCHOLIE

Il s'eſt agi dans ce problême de trouver un nombre, qui étant ajoûté ſéparément aux nombres a & b, faſſe deux nombres dont le premier ſoit au ſecond comme r à s; changeons à-préſent l'un pour l'autre les nombres a & b, & faiſons en de-même à l'égard de r & s: l'expreſſion du problême ſera alors: *Trouver un nombre qui étant ajoûté ſéparément aux nombres* a *&* b *faſſe la première ſomme à la ſeconde comme* s *à* r; mais la condition de ce problême eſt préciſément la même que celle de l'autre, & par conſéquent la ſolution doit être la même auſſi, c'eſt-à-dire, que com-

comme le changement réciproque de a pour b, de-même que celui de r pour s, laissent le problême tel qu'il étoit, la solution doit se trouver la même aussi. Voyons cependant quel effet produiroit le changement que nous venons de supposer: le nombre cherché étoit $\frac{as-br}{r-s}$; mais par la nouvelle supposition as devient br, & br devient as, $r-s$ devient $s-r$, & l'expression totale sera tournée ainsi, $\frac{br-as}{s-r}$; mais $\frac{br-as}{s-r}$ est la même chose que $\frac{as-br}{r-s}$; car en changeant le signe, tant du numérateur que du dénominateur d'une fraction quelconque, on n'altére pas davantage la valeur de cette fraction, que dans la division le changement du signe, tant du dividende que du diviseur n'affecte la valeur du quotient: ainsi il est clair, que le changement réciproque de a pour b, & de r pour s, n'affecte pas plus le théorême, par le moyen duquel nous avons déterminé le nombre cherché, qu'il n'altére le problême, dont ce théorême a été déduit.

PROBLEME 9.

143. *Partager un nombre donné* a *en deux parties, tellement que la quantité dont une de ces parties surpasse* b, *soit à ce qui manque à l'autre partie pour égaler* b, *comme* r *à* s.

SOLUTION.

Soit x la plus grande partie, & $\overline{a-x}$ la plus petite; cela étant, la quantité dont x surpasse b sera $x-b$; & celle dont b surpasse $\overline{a-x}$ sera $x-a+b$; mais par la condition du problême le premier excès est au second comme r à s: réduisez cette analogie en équation, & vous aurez $sx-bs=rx-ar+br$; donc $rx-sx=ar-br-bs$, & x (la plus grande partie) $=\frac{ar-br-bs}{r-s}$; donc $a-x$ (la plus petite partie) $=\frac{a}{1}\frac{-ar+br+bs}{r-s}=\frac{br+bs-as}{r-s}$; desorte que la plus grande partie est à la plus petite, comme $\frac{ar-br-bs}{r-s}$ est à $\frac{br+bs-as}{r-s}$.

EXEMPLE.

S'il étoit question (comme dans l'Art. 41.) de partager le nombre 48 en deux parties telles, que l'une fut trois fois autant au-dessus de 20 que l'autre partie est au-dessous de ce nombre: Ici $a=48$, $b=20$, $r=3$,

$s=1$;

$s=1$; car dire que l'excès doit surpasser trois fois le défaut, c'est dire en d'autres termes, que l'excès doit être au défaut comme 3 à 1; le reste n'a aucune difficulté.

DEMONSTRATION GENERALE.

Iment, la plus grande partie $\frac{ar-br-bs}{r-s}$, & la plus petite $\frac{br+bs-as}{r-s}$ ajoûtées ensemble font $\frac{ar-as}{r-s}=a$: d'un autre côté, l'excès de la plus grande partie par dessus b, est $\frac{ar-br-bs}{r-s}-\frac{b}{1}=\frac{ar-br-bs-br+bs}{r-s}$ $=\frac{ar-2br}{r-s}$, & l'excès de b par dessus la plus petite partie, qui est ce qui manque à cette partie pour être égale à b, est $\frac{b}{1}\frac{-br-bs+as}{r-s}$ $=\frac{br-bs-br-bs+as}{r-s}=\frac{as-2bs}{r-s}$ donc l'excès d'une partie par dessus b est ce qui manque à l'autre partie pour égaler b, comme $\frac{ar-2br}{r-s}$ est à $\frac{as-2bs}{r-s}$, c'est-à-dire, comme $ar-2br$ est à $as-2bs$, c'est-à-dire, comme $r\times\overline{a-2b}$ est à $s\times\overline{a-2b}$, ou comme r à s. C. Q. F. D.

PROBLEME 10. (Voyez Art. 55.)

144. *De deux endroits, éloignés l'un de l'autre de la distance* a, *partent en même tems deux hommes, dont l'un avance à raison de* p *milles dans le nombre d'heures* q, *& l'autre à raison de* r *milles dans le nombre d'heures* s: *on demande combien de tems ils ont été en chemin, & combien de milles chacun d'eux avoit faits, quand ils se sont rencontrés.*

SOLUTION.

Le nombre d'heures que chacun d'eux a été en chemin, x.

Milles faits par le premier, $\frac{px}{q}$.

Par le second, $\frac{rx}{s}$.

Par tous deux, $\frac{px}{q}+\frac{rx}{s}$.

Equation, $\frac{px}{q}+\frac{rx}{s}=a$; donc $px+\frac{qrx}{s}=aq$; donc $psx+qrx$ $=aqs$; donc x (nombre d'heures que chacun d'eux a été en chemin) =

$= \frac{aqs}{ps+qr}$: pour trouver présentement combien de milles le premier a faits, je dis, s'il fait p milles dans le nombre d'heures q, combien en fera-t-il dans un nombre d'heures égal à $\frac{aqs}{ps+qr}$? Pour avoir cette quatriéme proportionnelle, je multiplie le troisiéme nombre $\frac{aqs}{ps+qr}$ par le second p, & le produit est $\frac{apqs}{ps+qr}$; je divise ensuite ce produit par le premier nombre q, & le quotient est $\frac{aps}{ps+qr}$; car pour diviser une fraction il faut simplement diviser le numérateur : par un raisonnement tout pareil, les milles faits par l'autre se trouveront être $\frac{aqr}{ps+qr}$; donc le nombre total de milles faits par tous deux est $\frac{aps+aqr}{ps+qr} = a$, ce qui démontre la justesse de la solution.

EXEMPLE.

Que la distance, qui sépare les deux endroits, soit de 154 milles; que le premier voyageur fasse 3 milles en 2 heures, & le second 5 milles en 4 heures ; nous aurons alors $a=154$, $p=3$, $q=2$, $r=5$, $s=4$, $ps=12$, $qr=10$, $ps+qr=22$, $\frac{aqs}{ps+qr} = \frac{154 \times 2 \times 4}{22} = 56$, $\frac{aps}{ps+qr} = \frac{154 \times 3 \times 4}{22} = 84$, $\frac{aqr}{ps+qr} = \frac{154 \times 2 \times 5}{22} = 70$: donc chacun d'eux a été 56 heures en chemin ; le premier a fait 84 milles, & l'autre 70.

SCHOLIE.

Si dans le problême précédent on change p en r & q en s, & réciproquement ; il résultera de cette supposition, que le premier voyageur a avancé avec la vitesse du second, & le second avec la vitesse du premier ; mais le mouvement, par lequel ces deux voyageurs approchent l'un de l'autre, restera le même, & par conséquent le tems que chacun d'eux a été en chemin doit rester le même aussi : faisons donc les changemens indiqués, premiérement dans l'expression du tems, & voyons si cette expression sera la même : faisons ensuite les changemens en question dans les deux expressions des milles, pour voir si l'une de ces expressions n'est pas devenue l'autre, & réciproquement : premiérement donc, l'expression du tems, qui est $\frac{aqs}{ps+qr}$, en changeant p en r, & q en s, & réciproquement, devient $\frac{asq}{rq+sp}$, qui est la même que $\frac{aqs}{ps+qr}$; donc les changemens en ques-

question n'en produisent aucun dans l'expression du tems: secondement, les milles faits par le premier étoient $\frac{aps}{ps+qr}$: quantité qui, après les changemens indiqués, devient $\frac{arq}{rq+sp}$, qui est la même que $\frac{aqr}{ps+qr}$, c'est-à-dire, que les milles faits par le second. En vertu du même raisonnement, l'expression $\frac{aqr}{ps+qr}$ sera changée en $\frac{aps}{ps+qr}$; & ainsi le cas du premier voyageur sera devenu celui du second, & réciproquement.

PROBLEME II. (Voyez Art. 46.)

145. *Supposons que* p *livres d'or hors de l'eau pésent* q *livres dans l'eau, & que* r *livres d'argent pésent* s *livres dans l'eau; supposons de plus qu'une masse pesant* a *livres, & composée d'or & d'argent, ne pése que* b *livres dans l'eau: on demande la quantité d'or, & celle d'argent qu'il y a dans la masse.*

SOLUTION.

Le nombre de livres d'or dans la masse, x.
D'argent, $a-x$.

Le poids des livres d'or dans l'eau, $\frac{qx}{p}$.

Celui des livres d'argent $\frac{as-sx}{r}$.

Equation, $\frac{qx}{p}+\frac{as-sx}{r}=b$; donc $qx+\frac{aps-psx}{r}=bp$; donc $qrx+aps-psx=bpr$; donc $qrx-psx=bpr-aps$; donc x (ou le nombre de livres d'or dans la masse) $=\frac{bpr-aps}{qr-ps}$; donc $a-x$ (ou le nombre de livres d'argent) $=\frac{a}{1}\ \frac{-bpr+aps}{qr-ps}=\frac{aqr-bpr}{qr-ps}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, le poids de l'or $\frac{bpr-aps}{qr-ps}$, & celui de l'argent $\frac{aqr-bpr}{qr-ps}$ étant ajoutés ensemble font $\frac{aqr-aps}{qr-ps}=a$.

Secondement, nous devons déterminer combien chacun de ces métaux pése dans l'eau, en disant, si p livres d'or pésent q livres dans l'eau, que pésera $\frac{bpr-aps}{qr-ps}$? & la réponse sera $\frac{bqr-aqs}{qr-ps}$; pareillement le poids de l'argent se trouvera être $\frac{aqs-bps}{qr-ps}$.

 En

En troisiéme lieu, ajoûtez ensemble ces deux poids, c'est-à-dire $\frac{bqr-aqs}{qr-ps}$, & $\frac{aqs-bps}{qr-ps}$, & vous aurez $\frac{bqr-bps}{qr-ps}$, ou b. C. Q. F. D.

PROBLEME 12.

146. *Il y a deux tuyaux dont l'ouverture est telle que l'eau, qui passe par l'un remplit une citerne dans le tems* p; *celle qui passe par l'autre tuyau remplit la citerne dans le tems* q: *en quel tems la citerne sera-t-elle remplie si l'eau coule à la fois par les deux tuyaux?*

SOLUTION.

Appellez le tems cherché x; puis dites, si dans le tems p le premier tuyau fournit assez d'eau pour remplir la citerne, combien en fournira-t-il dans le tems x? & la réponse sera $\frac{x}{p}$; par la même raison $\frac{x}{q}$ désignera la quantité d'eau fournie par l'autre tuyau dans le même tems x; donc $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}$ exprimera la quantité d'eau fournie par tous deux; mais par la condition du problême, il faut qu'ils fournissent ensemble assez d'eau pour remplir la citerne en ce tems; ce qui nous donne cette Equation $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}=1$; donc $x+\frac{px}{q}=p$; donc $qx+px=pq$; donc x (ou le tems cherché) $=\frac{pq}{p+q}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, si l'eau, qui passe par le premier tuyau, remplit la citerne dans le tems p, l'eau, qui s'écoulera dans le tems $\frac{qp}{p+q}$, sera $\frac{q}{p+q}$.

Secondement, par la même raison, dans le tems $\frac{pq}{p+q}$, l'autre tuyau fournira la quantité $\frac{p}{p+q}$.

Donc, en troisiéme lieu, dans le tems $\frac{pq}{p+q}$, les deux tuyaux fourniront la quantité $\frac{p+q}{p+q}=1$, c'est-à-dire, rempliront la citerne. C.Q.F.D.

PRO-



PROBLEME 13.

147. *Quelqu'un a le nombre* n *d'enfans, dont les âges sont en progression arithmétique; la différence commune de cette progression est* d, *& l'âge de l'aîné des enfans est à celui du plus jeune comme* r *à* s: *on demande l'âge de l'aîné & celui du plus jeune.*

SOLUTION.

Ici on peut désigner l'âge de l'aîné par x, & par conséquent celui du second des enfans par $x-d$, & ainsi de suite; mais le calcul sera plus facile si l'on nomme l'âge de l'aîné $x-d$, ou $x-1d$, l'âge du second $x-2d$, celui du troisiéme $x-3d$, &c.; car par ce moyen, le coëfficient de d marquera dans l'expression de l'âge de chaque enfant le quantiéme enfant c'est; mais suivant cette façon de calculer, le coëfficient de d pour le plus jeune enfant sera n; donc son âge sera $x-nd$; ce qui nous donne cette proportion, $x-d$, $x-nd$, comme r à s; & (changeant la proportion en égalité) $rx-dnr=sx-ds$; donc $rx-sx-dnr=-ds$; donc $rx-sx=dnr-ds$; donc $x=\frac{dnr-ds}{r-s}$; donc $x-d$ (ou l'âge de l'aîné) est $\frac{dnr-ds}{r-s}-\frac{d}{1}=\frac{dnr-dr}{r-s}$; & $x-nd$ (ou l'âge du plus jeune) est $\frac{dnr-ds}{r-s}-\frac{nd}{1}=\frac{dns-ds}{r-s}$.

DEMONSTRATION.

Suivant ce calcul, l'âge de l'aîné est à celui du plus jeune comme $\frac{dnr-dr}{r-s}$ est à $\frac{dns-ds}{r-s}$, c'est-à-dire, comme $dnr-dr$ est à $dns-ds$, c'est-à-dire, comme $nr-r$ est à $ns-s$, c'est-à-dire comme $r\times\overline{n-1}$ est à $s\times\overline{n-1}$, c'est-à-dire, comme r à s. C. Q. F. D.

PROBLEME 14. (Voyez Art. 68.)

148. *Quel est le nombre qui, ajoûté séparément au nombre* a, *au nombre* b, *& au nombre* c, *tous nombres donnés, formera trois sommes en proportion Géométrique continue?* Le Lecteur peut, s'il le veut, considérer a comme le plus grand des trois nombres donnés, & c comme le plus petit.

SOLUTION.

Appellez le nombre cherché x, & la proportion ſera,

$x+a$ eſt à $x+b$ comme $x+b$ eſt à $x+c$.

Changeant cette analogie en égalité, nous aurons $xx+ax+cx+ac=xx+2bx+bb$; retranchez xx dans les deux membres, & il reſtera $ax+cx+ac=2bx+bb$; donc $ax-2bx+cx+ac=bb$; donc $ax-2bx+cx=bb-ac$; donc x (ou le nombre cherché) $=\frac{bb-ac}{a-2b+c}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, ſi le nombre cherché $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$ eſt ajoûté au premier nombre donné a, la ſomme ſera $\frac{aa-2ab+bb}{a-2b+c}=\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-b}}{a-2b+c}$, que j'appellerai pour cette raiſon le premier extrême.

Secondement, ſi $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$ eſt ajoûté au ſecond nombre b, la ſomme ſera $\frac{bb-ac+ab-2bb+bc}{a-2b+c}=\frac{ab-bb-ac+bc}{a-2b+c}$; mais pour ſe former une idée plus nette de cette fraction, on peut partager le numérateur en deux parties, ſavoir, $ab-bb$ & $-ac+bc$; il eſt clair que la premiére partie $ab-bb$ eſt le produit de $\overline{a-b}\times b$, & que la ſeconde partie $-ac+bc$ eſt le produit de $\overline{a-b}\times -c$; donc tout le numérateur eſt le produit de $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$, & le terme moyen eſt $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$.

En troiſiéme lieu, $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$ ajoûté au troiſiéme nombre donné c, fait $\frac{bb-2bc+cc}{a-2b+c}=\frac{\overline{b-c}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'eſt-à-dire, le dernier extrême.

En quatriéme lieu, reſte à examiner ſi ces trois ſommes ſont en proportion Géométrique continue: ſi nous comparons pour cet effet enſemble les deux premiers termes, nous trouverons que la premiére ſomme eſt à la ſeconde comme $\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-b}}{a-2b+c}$ eſt à $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{a-b}\times\overline{a-b}$ eſt à $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{a-b}$ eſt à $\overline{b-c}$.

En cinquiéme lieu, ſi nous comparons enſemble le ſecond terme & le troiſiéme, nous trouverons que la ſeconde ſomme eſt à la troiſiéme comme $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$ eſt à $\frac{\overline{b-c}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'eſt-à-dire, comme $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$ eſt à $\overline{b-c}\times\overline{b-c}$, c'eſt-à-dire comme $\overline{a-b}$ eſt à $\overline{b-c}$.

En

En sixiéme lieu, puisque la premiére somme est à la seconde comme $\overline{a-b}$ est à $\overline{b-c}$, & que pareillement la seconde somme est à la troisiéme comme $\overline{a-b}$ est à $\overline{b-c}$, il s'ensuit que la premiére somme est à la seconde, comme la seconde est à la troisiéme, & par conséquent que les trois sommes sont en proportion continue. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Il s'agissoit dans le dernier problême de trouver un nombre, qui étant ajoûté séparément à trois nombres donnés a, b & c, fît trois sommes en proportion continue: changeons présentement l'un pour l'autre les deux nombres a & c: il sera question alors de trouver un nombre, qui ajoûté séparément à trois nombres donnés c, b & a, fasse trois sommes en proportion continue: ici il est manifeste, premiérement, que le nombre cherché doit dans cette supposition être le même que dans l'autre; secondement, que la moyenne proportionnelle doit être la même aussi; & enfin que les extrêmes n'ont fait que changer de place: cela étant, si les expressions ont été justes dans le premier cas, la substitution de a & de c l'un pour l'autre doit produire dans ces expressions le même effet que dans la nature du problême. Voyons ce qui en est.

Premiérement donc, le nombre cherché dans le premier cas étoit $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$; substituez a au-lieu de c, & c au-lieu de a, l'expression sera changée en celle-ci, $\frac{bb-ca}{c-2b+a}$; mais $bb-ca$ est la même quantité que $bb-ac$, & $c-2b+a$ est la même que $a-2b+c$; donc le nombre cherché dans cette supposition est $\frac{bb-ac}{a-2b+c}$, le même que dans le problême.

Secondement, la moyenne proportionnelle dans le premier cas étoit $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$; changez a & c l'un pour l'autre, & l'expression sera alors $\frac{\overline{c-b}\times\overline{b-a}}{c-2b+a}$; mais $\overline{c-b}\times\overline{b-a}$ est la même quantité que $\overline{b-c}\times\overline{a-b}$ ou que $\overline{a-b}\times\overline{b-c}$, le changement de signes dans les deux quantités qu'on multiplie l'une par l'autre n'altérant pas davantage le produit que si ce changement n'avoit point été fait; d'ailleurs, comme nous l'avons déjà vu, $c-2b+a$ est la même chose que $a-2b+c$; donc la moyenne proportionnelle en ce cas est $\frac{\overline{a-b}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$, c'est-à-dire, la même que dans le problême.

En

En troisiéme lieu, le premier extrême, que la solution du problême nous a donné, est $\frac{\overline{a-b}\times\overline{a-b}}{a-2b+c}$; changez l'un pour l'autre a & c dans cette fraction, & elle deviendra $\frac{\overline{c-b}\times\overline{c-b}}{c-2b+a}=\frac{\overline{b-c}\times\overline{b-c}}{a-2b+c}$; donc le premier extrême dans cette nouvelle supposition est le même qu'auparavant.

Mais il ne faut pas qu'on s'imagine, que le but de ce *Scholie*, ou de quelque autre du même genre, soit de confirmer la solution des problêmes auxquels ils sont annexés, la chose n'étant nullement nécessaire; mon dessein principal en ceci est de faire sentir la beauté du vrai, la liaison nécessaire entre une vérité & une autre, & combien cette liaison est plus facile à appercevoir en Mathématiques qu'en aucune autre Science; & cependant il se pourroit très-bien que la peine que j'ai prise, ou que je prendrai à cet égard, fût perdue pour bien des Lecteurs.

PROBLEME 15. (Voyez Art. 38.)

149. *On demande deux nombres, dont le plus grand soit au plus petit comme* p *à* q, *& dont le produit soit à leur somme comme* r *à* s.

SOLUTION.

Si l'on appelle le plus petit nombre x, le plus grand se trouvera en disant, comme q est à p, ainsi x le plus petit nombre est à $\frac{px}{q}$ le plus grand; ainsi leur somme sera $\frac{px}{q}+\frac{x}{1}=\frac{px+qx}{q}$: d'un autre côté, si le plus grand nombre $\frac{px}{q}$ est multiplié par x, le produit sera $\frac{pxx}{q}$; donc le produit des deux nombres sera à leur somme comme $\frac{pxx}{q}$ est à $\frac{px+qx}{q}$ c'est-à-dire, comme px est à $p+q$; mais par une des conditions du problême, le produit est à la somme comme r à s; donc px est à $p+q$ comme r à s; ce qui nous donne cette équation $psx=pr+qr$; & x (le plus petit nombre cherché) $=\frac{pr+qr}{ps}$; donc $px=\frac{pr+qr}{s}$; car la division du dénominateur multiplie toute la fraction; donc $\frac{px}{q}$ (ou le plus grand nombre) $=\frac{pr+qr}{qs}$.

DEMONSTRATION.

Premiérement, le plus grand nombre est au plus petit comme $\frac{pr+qr}{qs}$ est

est à $\frac{pr+qr}{ps}$; divisez la somme $pr+qr$ par elle-même, & le quotient sera 1; ainsi nous pouvons dire, que le plus grand nombre est au plus petit comme $\frac{1}{qs}$ est à $\frac{1}{ps}$, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{q}$ est à $\frac{1}{p}$, c'est-à-dire, comme $\frac{p}{q}$ est à 1, c'est-à-dire, comme p à q.

Secondement, le plus grand nombre $\frac{pr+qr}{qs}$ & le plus petit $\frac{pr+qr}{ps}$ ajoûtés ensemble font $\frac{pprs+pqrs+pqrs+qqrs}{pqss}=\frac{pprs+2pqrs+qqrs}{pqss}$; mais $pp+2pq+qq=\overline{p+q}^2$; donc la somme des deux nombres cherchés est $\frac{rs\times\overline{p+q}^2}{pqss}$.

En troisiéme lieu, le plus grand nombre $\frac{pr+qr}{qs}$ multiplié par le plus petit $\frac{pr+qr}{ps}$, donne pour produit $\frac{rr\times\overline{p+q}^2}{pqss}$.

Donc, en quatriéme lieu, le produit des deux nombres cherchés est à leur somme comme $\frac{rr\times\overline{p+q}^2}{pqss}$ est à $\frac{rs\times\overline{p+q}^2}{pqss}$ c'est-à-dire, comme rr est à rs, ou comme r à s. *C. Q. F. D.*

PROBLEME 16. (Voyez Art. 63.)

150. *Quelqu'un tire une certaine quantité de vin d'une piéce pleine, qui contenoit le nombre de pintes* a; *ayant rempli ensuite la piéce d'eau, il tire de ce mélange de vin & d'eau autant qu'il avoit tiré de vin pur la premiére fois: la même chose ayant été faite jusqu'à quatre fois, de sorte qu'il ne reste de vin pur dans la piéce que le nombre de pintes* b, *on demande combien de pintes ont été tirées chaque fois.*

SOLUTION.

Appellez x le nombre de pintes qui reste dans la piéce après chaque fois qu'on en a tiré une certaine quantité, qui a toujours été la même; cela étant, il est manifeste, qu'après chaque évacuation, la quantité totale de liqueur dans la piéce, soit vin pur ou mélange de vin & d'eau, doit être diminuée en raison de a à x; donc le vin doit être diminué en cette raison, dans la supposition que la piéce n'ait pas été remplie de nouveau; ce qui nous donne les proportions suivantes. 1°. Comme a est à x, ainsi x quantité de vin pur qu'il y a eû dans la piéce après la premiére éva-

cuation, à $\frac{xx}{a}$, vin qu'il y a eu dans la piéce après la seconde évacuation; 2°. comme a est à x, ainsi $\frac{xx}{a}$, vin qu'il y a eu dans la piéce après la seconde évacuation, à $\frac{x^3}{a^2}$, vin qui est resté après la troisiéme évacuation; enfin, comme a est à x, ainsi $\frac{x^3}{a^2}$, vin qui est resté après la troisiéme évacuation, à $\frac{x^4}{a^3}$, vin qui est resté après la quatriéme évacuation; mais suivant le Problême, le vin qu'il y a eu après la quatriéme évacuation étoit b; donc $\frac{x^4}{a^3}=b$; donc $x^4=a^3b=a^4\times\frac{b}{a}$; faites $\frac{b}{a}=s^4$, & vous aurez $x^4=a^4s^4$, & x (ou la quantité de liqueur qu'il y a eu dans la piéce après chaque évacuation) $=as$; donc $a-x$, (ou la quantité prise chaque fois) sera $a-as=a\times\overline{1-s}$.

Exemple.

Supposons que la piéce tienne 81 pintes, & qu'il restoit 16 pintes de vin pur après la quatriéme évacuation; cela étant nous aurons $a=81$, $b=16$, $\frac{b}{a}$ ou $s^4=\frac{16}{81}$ $ss=\frac{4}{9}$, $s=\frac{2}{3}$, $1-s=\frac{1}{3}$, $a\times\overline{1-s}=81\times\frac{1}{3}=27$; donc chaque évacuation a été de 27 pintes.

Demonstation.

Puisque le vin a été diminué dans la piéce à chaque évacuation en raison de a à x, c'est-à-dire, en raison de a à as, ou de 1 à s, il s'ensuit, que comme 1 est à s, ainsi x ou as, vin qui est resté après la premiére évacuation, est à ass, vin qui est resté après la seconde évacuation; & par la même raison, comme 1 est à s, ainsi as^2 est à as^3, vin qui est resté après la troisiéme évacuation; & enfin, comme 1 à s, ainsi as^3 est à as^4, vin qui est resté après la derniére évacuation; mais $as^4=a\times\frac{b}{a}$ par la supposition, $=b$; donc la quantité de vin pur qui restoit dans la piéce après la quatriéme évacuation étoit b. *C. Q. F. D.*

N. B. Comme il n'y a que fort peu de nombres, dont on puisse tirer exactement la racine quarrée; il y en a bien moins encore dont on puisse extraire les racines d'un genre plus élevé; mais dans la suite de cet Ouvrage, je dirai comment il faut s'y prendre pour extraire toutes les racines avec une égale facilité, & généralement parlant avec autant d'exactitude qu'il est nécessaire, savoir, par le moyen d'une table complette de Logarithmes.

PRO-

PROBLEME 17.

151. *On demande deux nombres tels, que le produit de leur multiplication soit* p, *& le quotient de la division du plus grand par le plus petit* q.

SOLUTION.

Nommez le plus grand nombre x, & par conséquent le plus petit $\frac{p}{x}$; cela étant le quotient du plus grand divisé par le plus petit sera $\frac{xx}{p}$; mais suivant le problême, ce quotient doit être q; donc $\frac{xx}{p}=q$, & $xx=pq$, & x, (le plus grand nombre cherché) $=\sqrt{pq}$: de plus, puisque $xx=pq$, nous avons $\frac{pp}{xx}=\frac{pp}{pq}=\frac{p}{q}$; & $\frac{p}{x}$ (ou le plus petit nombre cherché) $=\sqrt{\frac{p}{q}}$; si bien que le plus grand des deux nombres cherchés est $\sqrt{pq}$, & le plus petit $\sqrt{\frac{p}{q}}$.

EXEMPLE.

Que le produit des deux nombres cherchés soit 144, & le quotient du plus grand divisé par le plus petit égal à 16; nous aurons $p=144$, $q=16$, $pq=144\times16$, $\sqrt{pq}=12\times4=48$; $\frac{p}{q}=\frac{144}{16}$, $\sqrt{\frac{p}{q}}=\frac{12}{4}=3$; donc les nombres sont $48+3$.

DEMONSTRATION.

1°. pq multiplié par $\frac{p}{q}$ donne $\frac{ppq}{q}=pp$; donc $\sqrt{pq}$ multipliée par $\sqrt{\frac{p}{q}}$ donne p.

2°. pq étant divisé par $\frac{p}{q}$, donne pour quotient $\frac{pqq}{p}=qq$; donc $\sqrt{pq}$ divisée par $\sqrt{\frac{p}{q}}$ donne q. C.Q.F.D.

PROBLEME 18.

152. *Soient* x *&* y *deux quantités inconnues, &* a, b, c, d, e, f, *autant de quantités connues: on demande les valeurs de* x *& de* y *par le moyen des deux équations suivantes, savoir,* $ax+by=c$, *&* $dx+ey=f$.

SOLUTION.

1ére, Equation $ax+by=c$.

2de, Equation $dx+ey=f$. Multipliez la premiére équation par d, & vous aurez $adx+bdy=cd$; multipliez la seconde équation par a, & vous aurez $adx+aey=af$; retranchez la premiére de ces deux nouvelles équations de la seconde, & vous aurez

3éme, Eq. $\overline{ae-bd}\times y=af-cd$; par conséquent

4éme, Eq. $y=\frac{af-cd}{ae-bd}$.

Donc $by=\frac{abf-bcd}{ae-bd}$; substituez cette valeur à la place de by dans la premiére équation, & vous aurez $ax+\frac{abf-bcd}{ae-bd}=c$, multipliez l'un & l'autre membre par $\overline{ae-bd}$, & vous aurez $\overline{aae-abd}\times x+abf-bcd=ace-bcd$; retranchez $-bcd$ des deux membres de l'équation, & il restera $\overline{aae-abd}\times x+abf=ace$; divisez le tout par a, & il viendra $\overline{ae-bd}\times x+bf=ce$; donc $\overline{ae-bd}\times x=ce-bf$; donc $x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$; $y=\frac{af-cd}{ae-bd}$.

J'ai suivi la méthode ordinaire pour déterminer la valeur de x; mais après avoir déterminé celle de y, j'aurois pu découvrir plus facilement & plus promtement ce que valoit x: supposons que les deux équations fondamentales ayent été $bx+ay=c$, & $ex+dy=f$; on auroit pu en inférer, que x en ce cas auroit été déterminé précisément comme y l'a été dans l'autre cas, & y sera ici comme x étoit-là; ainsi en changeant a en b, & d en e, & réciproquement, on changera y en x; or l'expression de y est $\frac{af-cd}{ae-bd}$; changez dans cette expression a en b, & d en e, & réciproquement, & vous aurez $\frac{bf-ce}{bd-ae}=\frac{ce-bf}{ae-bd}=x$.

Il paroît par cet exemple, auquel il nous seroit facile d'en ajoûter plusieurs autres, que de pareilles spéculations sont quelquefois d'autant d'usage dans le calcul, qu'amusantes pour ceux qui ont du goût & du génie, quoique peut-être trop subtiles pour la plupart des commençans.

Pour mieux concevoir le sens des expressions précédentes, il est bon de disposer les quantités dans l'ordre que voici:



a	d
c	f
b	e

Pre-

Premiérement placez a & d, *les deux coëfficiens de* x, *l'un après l'autre dans le même ordre où ils se trouvent dans les deux équations fondamentales; placez au-dessous de ces quantités, & dans le même ordre* c & f, *les deux termes absolus; & enfin sous ces termes placez* b & e, *les deux coëfficiens de* y; *cela étant fait, multipliez en croix* a *par* f, & d *par* c, & *vous aurez* af—cd *pour numérateur de la valeur de* y; *multipliez ensuite* c *par* e & f *par* b & ce—bf *sera le numérateur de la valeur de* x; *enfin multipliez* a *par* e & d *par* b, & ae—bd *sera le dénominateur commun des deux numérateurs que nous venons d'indiquer; de sorte que les coëfficiens de* x *entrent dans le numérateur de* y, *ceux de* y *dans le numérateur de* x, & *tant les uns que les autres dans le dénominateur commun.*

EXEMPLE.

On demande les valeurs de x & de y au moyen des deux équations suivantes;

$$3x-4y=6, \quad \&$$
$$5x-6y=14.$$

Les termes étant disposés suivant la méthode précédente, seront

3	5
6	14
−4	−6

Je commence mon opération en multipliant $3\times14=42$; puis $5\times6=30$; & après avoir soustrait ce dernier produit du premier, il me reste 12 pour numérateur de y: ensuite je multiplie $6\times-6=-36$, & $14\times-4=-56$; ce dernier produit retranché de l'autre laisse $+20$ pour numérateur de x; enfin je multiplie $3\times-6=-18$ & $5\times-4=-20$; & ce dernier produit retranché de l'autre laisse $+2$ pour dénominateur commun de x & de y; si bien que nous avons $x=\frac{20}{2}$ ou 10, & $y=\frac{12}{2}$ ou 6; & ces nombres satisfont aux conditions du problême.

N. B. S'il manquoit quelqu'un des termes ax, by, dx, ey, les coëfficiens doivent être remplacés par des zéros; par exemple, si ax manquoit, il faudroit supposer a égal à o.

LA DEMONSTRATION GENERALE.

1. Puisque $x=\frac{ce-bf}{ae-bd}$, & $y=\frac{af-cd}{ae-bd}$ nous aurons $ax=\frac{ace-abf}{ae-bd}$, & $by=\frac{abf-bcd}{ae-bd}$; donc $ax+by=\frac{ace-bcd}{ae-bd}=c$.

2. $dx=$

2. $dx = \frac{cde - bdf}{ae - bd}$, & $ey = \frac{aef - cde}{ae - bd}$; donc $dx + ey = \frac{aef - bdf}{ae - bd} \pm f$. C. Q. F. D.

PROBLEME 19.

153. *Deux personnes* A *&* B *parloient de leur argent.* A *dit à* B, *donnez-moi* q *de votre argent, & j'aurai alors* r *fois autant qu'il vous en restera.* B *dit à* A, *donnez-moi* q *de votre argent, & j'aurai alors* s *fois autant qu'il vous en restera: on demande l'argent que chacun d'eux avoit.*

SOLUTION.

Nommez l'argent de A & de B x & y respectivement, & les équations fondamentales seront

$$x + q = ry - qr, \text{ \&}$$
$$y + q = sx - qs.$$

Après avoir réduit ces équations à la formule du dernier problême, nous aurons

$$x - ry = -q - qr, \text{ \&}$$
$$sx - y = +q + qs.$$

Disposez les coëfficiens & les termes absolus comme dans le dernier problême, & vous aurez

$$\begin{array}{cc} 1 & s \\ -q - qr & +q + qs \\ -r & -1 \end{array}$$

Faites la premiére multiplication prescrite, & il viendra $1 \times \overline{q + qs} = q + qs$, & $s \times -\overline{q - qr} = -qs - qrs$; retranchez le dernier produit du premier, & vous aurez $q + 2qs + qrs$ pour numérateur de l'inconnue y; faites la seconde multiplication, & vous aurez $-\overline{q - qr} \times -1 = +q + qr$, & $\overline{q + qs} \times -r = -qr - qrs$; retranchez ce dernier produit du premier, & il restera $q + 2qr + qrs$ pour numérateur de x; enfin faites la derniére multiplication, & il en naîtra $1 \times -1 = -1$, & $s \times -r = -rs$; retranchez ce dernier produit du premier, & vous aurez $rs - 1$ pour dénominateur commun; donc x (ou l'argent de A,) étoit $\frac{q + 2qr + qrs}{rs - 1}$; & y (ou l'argent de B) étoit $\frac{q + 2qs + qrs}{rs - 1}$.

Si l'on prend q égal à $rs - 1$, il détruira le dénominateur, & la solution se trouvera en nombres entiers, de la maniére suivante; l'argent de A sera $1 + 2r + rs$, & celui de B sera $1 + 2s + rs$; comme par exemple, soit $r = 3$, & $s = 7$; cela étant on aura $rs - 1 = 20$; supposez $q = 20$,

&

& le problême pourra être énoncé en ces termes. *A* dit à *B*, donnez-moi vingt schellings de votre argent, & j'aurai alors trois fois plus d'argent qu'il ne vous en restera. *B* dit à *A*, donnez-moi vingt schellings de votre argent, & j'aurai alors sept fois plus d'argent qu'il ne vous en restera: c'est ce qui est vrai aussi; car l'argent de *A* est $1+2r+rs=28$ schellings, & celui de *B*, ou $1+2s+rs=36$ schellings.

N. B. Si *A*, après avoir reçu q de l'argent de *B*, avoit une somme égale à ce qui restoit à *B*, r devroit en ce cas être fait égal à 1.

La Demonstration Generale.

1°. Si à l'argent de *A*, savoir, $\frac{q+2qr+qrs}{rs-1}$, on ajoûte q, la somme sera $\frac{2qr+2qrs}{rs-1}$; & si de l'argent de *B*, savoir, $\frac{q+2qs+qrs}{rs-1}$, on soustrait q, le reste sera $\frac{2q+2qs}{rs-1}$: somme qu'il ne faut simplement que multiplier par r pour la rendre égale à la somme de *A* après qu'on y a ajoûté q: ainsi on a satisfait à la premiére condition du problême.

2°. Si à l'argent de *B* on ajoûte q, la somme se trouvera être $\frac{2qs+2qrs}{rs-1}$; & si de l'argent de *A* on soustrait q, le reste sera $\frac{2q+2qr}{rs-1}$, somme qu'il suffit de multiplier par s, pour la rendre égale à la somme de *B* augmentée de la quantité q; donc on a pareillement satisfait à la seconde condition du problême. *C. Q. F. D.*

Probleme 20. (Voyez Art. 81.)

154. *On demande deux nombres x & y, qui soient tels, que si on les multiplie l'un & l'autre par r, le premier produit soit un quarré, & le second le côté ou la racine de ce quarré; mais que si on multiplie l'un & l'autre par s, le premier produit soit un cube, & le second la racine de ce cube.*

Solution.

Les nombres x & y étant multipliés séparément par r, donneront rx & ry, dont le premier doit être le quarré de l'autre; ce qui nous fournit cette équation $rx=r^2y^2$ & $x=ry^2$: de plus, x & y multipliés séparément par s donneront sx & sy, dont le premier doit être le cube de l'autre; d'où nous déduisons cette équation $sx=s^3y^3$, & $x=s^2y^3$; donc $s^2y^3=ry^2$, chacune de ces grandeurs en particulier étant $=x$; divisez les deux membres par y^2,

y^2, & vous aurez $s^2y=r$, & $y=\frac{r}{ss}$; mais si $y=\frac{r}{ss}$, $y^2=\frac{r^2}{s^4}$, & ry^2 ou $x=\frac{r^3}{s^4}$; donc les nombres sont $x=\frac{r^3}{s^4}$ & $y=\frac{r}{s^2}$.

DEMONSTRATION.

Si les nombres $\frac{r^3}{s^4}$, & $\frac{r}{s^2}$ sont multipliés l'un & l'autre par r, leurs produits seront $\frac{r^4}{s^4}$ & $\frac{r^2}{s^2}$, dont le premier est un quarré, & le dernier la racine de ce quarré; & si les mêmes nombres $\frac{r^3}{s^4}$ & $\frac{r}{s^2}$ sont multipliés par s, les produits seront $\frac{r^3}{s^3}$ & $\frac{r}{s}$, dont le premier est un cube, & le dernier la racine de ce cube. *C. Q. F. D.*

PROBLEME 21. (Voyez Art. 130.)

155. *On demande deux nombres, dont la différence multipliée par la différence de leurs quarrés fasse* a, *& dont la somme multipliée par la somme de leurs quarrés fasse* b.

SOLUTION.

Pour les deux nombres cherchés mettez x & y; cela étant fait, suivant la premiére supposition, $\overline{x-y}\times\overline{x^2-y^2}$, ou $\overline{x-y}\times\overline{x-y}\times\overline{x+y}$, ou $\overline{xx-2xy+y^2}\times\overline{x+y}=a$; donc

1ére Eq. $x^2-2xy+y^2=\frac{a}{x+y}$.

En vertu de la seconde supposition, $\overline{x+y}\times\overline{x^2+y^2}=b$; donc

2de Eq. $x^2+y^2=\frac{b}{x+y}$.

De deux fois la seconde équation, retranchez la premiére,

c'est-à-dire, de $2x^2 \;*+2y^2=\frac{2b}{x+y}$

retranchez $x^2-2xy+y^2=\frac{a}{x+y}$

& il restera $x^2+2xy+y^2=\frac{2b-a}{x+y}$

c'est-à dire $\overline{x+y}^2=\frac{2b-a}{x+y}$; donc $\overline{x+y}^3=2b-a$; faites $2b-a=r^3$, c'est-à-dire, mettez r pour la racine cubique de $2b-a$, & vous aurez

3éme Eq. $x+y=r$.

Dans la premiére équation nous avions $x^2-2xy+y^2=\frac{a}{x+y}=\frac{a}{r}$, c'est-à-dire,

à-dire, $\overline{x-y}^2 = \frac{a}{r}$; faites $\frac{a}{r} = ss$, c'eſt-à-dire, mettez s pour la racine quarrée de $\frac{a}{r}$, & vous aurez

4ére. Eq. $x-y=s$.

Ajoûtez la troiſiéme équation & la quatriéme enſemble, & vous aurez $2x=r+s$, & $x=\frac{r+s}{2}$; retranchez la quatriéme équation de la troiſiéme, & vous aurez $2y=r-s$, & $y=\frac{r-s}{2}$; ce qui nous fournit la règle ſuivante:

Faites $2b-a=r^2$, & $\frac{a}{r}=s^2$, *& les nombres cherchés ſeront* $\frac{r+s}{2}$ *&* $\frac{r-s}{2}$.

DEMONSTRATION.

La différence des nombres $\frac{r+s}{2}$ & $\frac{r-s}{2}$ eſt s, & la différence de leurs quarrés eſt rs, comme on peut aiſément s'en convaincre par le calcul; donc la différence des nombres multipliée par la différence de leurs quarrés eſt $rss = \frac{ra}{r} = a$: de plus, la ſomme des nombres $\frac{r+s}{2}$ & $\frac{r-s}{2}$ eſt r, & la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{r^2+s^2}{2}$; donc la ſomme des nombres multipliée par la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{r^3+rss}{2}$; mais par la règle indiquée ci-deſſus $r^2=2b-a$, & par la même règle $rss=a$; donc la ſomme des nombres multipliée par la ſomme de leurs quarrés eſt $\frac{2b-a+a}{2}=b$. *C. Q. F. D.*

PROBLEME 22.

156. *Que d'un jeu ordinaire de cinquante-deux cartes on faſſe pluſieurs monceaux de la manière ſuivante: que ſur la carte la plus baſſe de chaque monceau, on en mette autant d'autres qu'il eſt néceſſaire pour arriver au nombre de douze; comme ſi la valeur de la carte la plus baſſe étoit un quatre, il faudroit mettre par deſſus huit autres cartes; ſi c'étoit un cinq, il faudroit en mettre ſept; ſi c'étoit* a, *douze* − a, *&c. On demande, le nombre des monceaux, que nous appellerons* n, *étant donné, comme auſſi le nombre des cartes qui reſtent en main, que nous nommerons* r, *de trouver la ſomme des valeurs de toutes les cartes les plus baſſes.*

SOLUTION.

Que a, b, c, &c. expriment reſpectivement la valeur de chaque carte, qui eſt au-deſſous de toutes les autres dans les différens monceaux;

en ce cas $12-a$ désignera le nombre de toutes les cartes, qui sont au-dessus de la carte la plus basse du premier monceau, c'est-à-dire, le nombre de toutes les cartes du premier monceau, excepté la plus basse, sera $12-a$; donc $13-a$ sera le nombre de toutes les cartes dans le premier monceau; par la même raison, $13-b$ exprimera le nombre de toutes les cartes dans le second monceau, & $13-c$ celles du troisiéme monceau, &c. ainsi le nombre de toutes les cartes dans tous les monceaux sera $13\times n-a-b-c$ &c. faites $a+b+c$ &c. (ou la somme des valeurs de toutes les cartes qui sont les plus basses dans chaque monceau) $=x$, & vous aurez le nombre de toutes les cartes mises en monceaux $=13n-x$; mais ces nombres, avec r, qui marque combien il reste encore de cartes en main, sont égaux à 52; ainsi nous avons cette équation, $13n-x+r=52$; donc $x+52=13n+r$; donc $x=13n-52+r$; mais $52=13\times4$; donc $13n-52=13\times\overline{n-4}$; donc $x=13\times\overline{n-4}+r$; ce qui veut dire en langage ordinaire: *Du nombre des monceaux retranchez quatre, multipliez le reste par treize; & ce produit, ajoûté au nombre des cartes qui restent encore en main, donnera la somme des valeurs de toutes les cartes les plus basses:* par exemple, qu'il y ait trois monceaux, & trente cartes de reste; retranchant 4 de 3, il restera -1; ce nombre multiplie par 13 fait -13, & ce produit ajoûté à 30, nombre des cartes qui restent en main, donne 17 pour somme des valeurs de toutes les cartes les plus basses.

Voici un théorême plus général.

Soit n *le nombre des monceaux,* p *celui des cartes dans un jeu; qu'on mette autant de cartes au-dessus de la plus basse carte de chaque monceau qu'il en faut pour rendre le nombre égal à* q; *& enfin, soit* r *le nombre des cartes qui restent en main; & la somme des valeurs de toutes les cartes les plus basses se trouvera être* $\overline{q+1}\times\overline{n}+r-p$.

PROBLEME 23.

157. *On demande les valeurs des trois quantités inconnues* x, y *&* z *au moyen de trois équations telles que* $px+qy+rz=s$, *où les quantités représentées par* p, q, r, *sont toutes supposées connues.*

N. B. Comme j'ai déjà été assez prolixe dans mon problême 18, j'épargnerai au Lecteur la peine que pourroit lui donner le théorême suivant, & me contenterai de lui en faciliter la solution, s'il juge à propos de l'entreprendre. Donnons-lui d'abord le théorême, qui est:

SOLU-



SOLUTION.

Premiérement placez les trois coëfficiens de x *l'un après l'autre comme ils sont dans les trois équations, coëfficiens que nous appellerons* a, b, c; *au-dessous d'eux mettez les trois termes absolus,* d, e, f; *sous ces derniers mettez les coëfficiens de* z, *savoir,* g, h, k; *& sous eux les coëfficiens de* y, *savoir,* l, m, n: *il faut de ces quatre séries en déduire deux autres, savoir,* α, β, γ, *&* δ, ε, ζ; *& de ces deux derniéres une troisiéme, savoir,* η, θ, κ: *tous ces termes doivent être rangés comme ils le sont dans la figure ci-jointe* †; *& pour avoir les termes des trois derniéres séries, il faut se servir de la multiplication en croix, dont il a été parlé ci-dessus, & faire* $ae-bd=\alpha$, $ah-bg=\beta$, $am-bl=\gamma$; *faites aussi* $bf-ce=\delta$, $bk-ch=\varepsilon$, *&* $bn-em=\zeta$; *enfin, faites* $\alpha\varepsilon-\delta\beta=\eta$, $\alpha\zeta-\delta\gamma=\theta$, *&* $\beta\zeta-\varepsilon\gamma=\kappa$, *& cette derniére suite* η, θ, κ *résoudra le problême; car* y *sera* $\frac{-\eta}{\kappa}$, *&* z *sera* $\frac{+\theta}{\kappa}$: *ainsi il sera facile d'avoir* x *par quelqu'une des trois équations fondamentales, si on substitue à la place de* y *& de* z *leurs valeurs trouvées ici.*

†

a	b	c
d	e	f
g	h	k
l	m	n
α		δ
β		ε
γ		ζ
	η	
	θ	
	κ	

Celui qui voudra se mettre bien au fait de ce théorême, fera bien de suivre la méthode prescrite dans le 18éme problême; car si $px+qy+rz=s$, nous aurons $px+qy=s-rz$; où la quantité $s-rz$ doit être considérée comme le terme absolu: ceci posé, s'il fait usage des coëfficiens contenus dans les séries décrites ci-dessus, & qu'il applique la méthode du 18éme problême aux deux premiéres équations, il trouvera la valeur de y, après qu'elle aura été réduite à l'expression la plus simple, $=\frac{\alpha-\beta z}{\gamma}$; & s'il applique la même méthode à la seconde équation & à la troisiéme, il trouvera $y=\frac{\delta-\varepsilon z}{\zeta}$; ainsi il aura cette nouvelle équation, $\frac{\alpha-\beta z}{\gamma}=\frac{\delta-\varepsilon z}{\zeta}$; qui lui donnera, quand il l'aura résolue, $z=\frac{\theta}{\kappa}$; & s'il considére comment les termes α, β, γ, &c. ont été obtenus, il tombera naturellement dans la méthode décrite ci-dessus; enfin, quand à l'aide de ce théorême il aura déterminé la valeur de z, il déterminera aussi

aussi aisément la valeur de y, savoir, en mettant les coëfficiens de y à la place de ceux de z, & réciproquement.

N. B. Dans le dessein où je suis de donner présentement quelques exemples de la solution de divers problêmes généraux qui produisent des équations du second degré, j'avertirai le Lecteur une fois pour toutes, que quand j'aurai à exprimer la racine quarrée d'une quantité qui n'est point un quarré, pour éviter les racines sourdes, je me servirai la plupart du tems de la lettre s, mettant s^2 pour le nombre dont la racine quarrée est signifiée par s: par exemple, si je devois exprimer la racine quarrée de $\frac{aa-4b}{4}$, comme le dénominateur 4 est un nombre quarré, je ne le comprends point dans la valeur de s^2, & substitue simplement s^2 à la place de $aa-4b$; ainsi $\frac{aa-4b}{4}=\frac{s^2}{4}$, & la racine quarrée de cette fraction sera $\frac{s}{2}$; si je devois exprimer la racine quarrée de $\frac{4b-a^3}{12a}$, comme ni le numérateur ni le dénominateur ne sont des nombres quarrés, je pourrois désigner la fraction entiére par ss; mais considérant que $\frac{4b-a^3}{12a}$ est le produit de $\frac{1}{4}$ multiplié par $\frac{4b-a^3}{3a}$, & que la premiére de ces fractions est un quarré, ce que l'autre n'est pas, j'aime mieux mettre ss pour le multiplicateur $\frac{4b-a^3}{3a}$, & rendre ainsi $\frac{4b-a^3}{12a}=\frac{ss}{4}$.

J'avertis de plus, que je résoudrai toutes les équations suivantes à la façon ordinaire, sans avoir recours au théorême général de l'Art. 103.

PROBLEME 24. (Voyez Art. 111.)

158. *On demande deux nombres tels, que leur somme soit* a, *& le produit de leur multiplication* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés x & $a-x$.

Le produit de leur multiplication, $ax-xx=b$; en changeant tous les signes, $xx-ax=-b$, & rendant le quarré complet, $xx-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}-b=\frac{aa-4b}{4}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée des deux membres, c'est-à-dire, de $x^2-ax+\frac{aa}{4}$ d'un côté, & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$, & $x=\frac{a\pm s}{2}$; d'où l'on peut déduire la régle suivante:

Faites

Faites $aa-4b=ss$, *& le plus grand nombre sera* $\frac{a+s}{2}$, *& le plus petit* $\frac{a-s}{2}$.

LA DEMONSTRATION SYNTHETIQUE.

1°. $\frac{a+s}{2}$ ajoûté à $\frac{a-s}{2}$ donne. $\frac{2a}{2}$ ou a.

2°. $\frac{a+s}{2}$ multiplié par $\frac{a-s}{2}$ donne $\frac{aa-ss}{4}$ = (par la substitution de $-aa+4b$ au lieu de $-ss$) $\frac{aa-aa+4b}{4}=\frac{4b}{4}=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux nombres tels, que leur somme soit 25 & le produit de leur multiplication 144. Ici $a=25$, $b=144$, $aa-4b$ ou $ss=49$, $s=7$, $\frac{a+s}{2}=16$, $\frac{a-s}{2}=9$; ainsi les nombres sont 9 & 16.

PROBLEME 25. (Voyez Art. 113.)

159. *On demande deux nombres, dont la somme soit* a, *& la somme de leurs quarrés* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés x & $a-x$.
Le quarré du premier xx.
Le quarré du dernier, $aa-2ax+xx$.
La somme de leurs quarrés $aa-2ax+2xx=b$; donc $2xx-2ax=b-aa$, & $xx-ax=\frac{b-aa}{2}$ & $xx-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}+\frac{b-aa}{2}=\frac{2b-aa}{4}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée de l'un & l'autre membre, c'est-à-dire de $xx-ax+\frac{aa}{4}$ d'un côté & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$, & $x=\frac{a\pm s}{2}$, d'où l'on peut déduire la règle suivante:

Faites $2b-aa=ss$, *& vous aurez* $\frac{a+s}{2}$ *pour le plus grand nombre, &* $\frac{a-s}{2}$ *pour le plus petit.*

DEMONSTRATION.

1°. $\frac{a+s}{2}$ ajoûté à $\frac{a-s}{2}$ donne a.

2°. Le quarré de $\frac{a+s}{2}$ est $\frac{aa+2as+ss}{4}$ le quarré de $\frac{a-s}{2}$ est

$\frac{aa-2as+ss}{4}$

$\frac{aa-2as+ss}{4}$; & par conséquent la somme de leurs quarrés est $\frac{2aa+2ss}{4}=$ $\frac{aa+ss}{2}=$ (par la règle) $\frac{aa+2b-aa}{2}=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux nombres dont la somme fasse 28, & la somme de leurs quarrés 400. Ici $a=28$, $b=400$, $2b-aa$ ou $ss=16$, $s=4$, $\frac{a+s}{2}=16$, $\frac{a-s}{2}=12$; ainsi les nombres sont 12 & 16.

PROBLEME 26. (Voyez Art. 114.)

160. *On demande deux nombres, dont la somme soit* a, *& la somme de leurs cubes* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés, x & $a-x$.
Le cube du premier, x^3.
Le cube du dernier, $a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$.

La somme de leurs cubes $a^3-3a^2x+3ax^2=b$; donc $3ax^2-3a^2x=b-a^3$; divisez toute l'équation par $3a$, & vous aurez $xx-ax=\frac{b-a^3}{3a}$, & $xx-ax+\frac{aa}{4}=\frac{aa}{4}+\frac{b-a^3}{3a}=\frac{4b-a^3}{12a}=\frac{1}{4}\times\frac{4b-a^3}{3a}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée des deux membres, c'est-à-dire, de $xx-ax+\frac{aa}{4}$ d'un côté, & $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x-\frac{a}{2}=\pm\frac{s}{2}$ & $x=\frac{a\pm s}{2}$; ce qui nous donne la règle suivante:

Faites $\frac{4b-a^3}{3a}=ss$, *& vous aurez* $\frac{a+s}{2}$ *pour le plus grand nombre &* $\frac{a-s}{2}$ *pour le plus petit.*

DEMONSTRATION.

1°. $\frac{a+s}{2}$ ajoûté à $\frac{a-s}{2}$ fait a.

2°. Le cube de $\frac{a+s}{2}$ est $\frac{a^3+3a^2s+3as^2+s^3}{8}$, & le cube de $\frac{a-s}{2}$ est $\frac{a^3-3a^2s+3as^2-s^3}{8}$; donc la somme des cubes est $\frac{2a^3+6as^2}{8}=$ $\frac{a^3+3ass}{4}=\frac{a^3+4b-a^3}{4}$ par la règle, $=b$. *C. Q. F. D.*

Exem-

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux nombres, dont la somme soit 7, & la somme de leurs cubes 133. Ici $a=7$, $b=133$, $\frac{4b-a^3}{3a}$ ou $ss=9$, $s=3$, $\frac{a+s}{2}=5$, $\frac{a-s}{2}=2$; ainsi les nombres sont 5 & 2.

PROBLEME 27.

161. *On demande deux nombres, qui ayent pour différence* d, *& qui, s'ils divisent l'un & l'autre le nombre donné* a, *produisent deux quotiens dont la différence soit* b.

SOLUTION.

Les deux nombres cherchés, x & $x+d$.

Les deux quotiens $\frac{a}{x}$ & $\frac{a}{x+d}$.

La différence de ces quotiens $\frac{a}{x}-\frac{a}{x+d}=\frac{ad}{xx+dx}=b$; donc $bxx+bdx=ad$; & $xx+dx=\frac{ad}{b}$; donc $xx+dx+\frac{dd}{4}=\frac{ad}{b}+\frac{dd}{4}=\frac{1}{4}\times\overline{\frac{4ad}{b}+dd}=\frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée de $xx+dx+\frac{dd}{4}$ d'un côté, & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x+\frac{d}{2}=\pm\frac{s}{2}$; donc $x=\frac{s-d}{2}$ ou $\frac{-s-d}{2}$; rejettez la racine négative, & il vous restera x (le plus petit diviseur) $=\frac{s-d}{2}$, & $x+d$ (le plus grand diviseur) $=\frac{s-d}{2}+\frac{d}{2}=\frac{s+d}{2}$; ce qui nous donne la règle suivante:

Faites $\frac{4ad}{b}+dd=ss$, *& vous aurez* $\frac{s+d}{2}$ *pour le plus grand diviseur, &* $\frac{s-d}{2}$ *pour le plus petit.*

N. B. Il paroît manifestement que $\frac{s-d}{2}$ est une grandeur affirmative, puisque $ss=\frac{4ad}{b}+dd$; donc ss est plus grand que dd, & s plus grand que d; donc $\frac{s-d}{2}$ est une quantité affirmative.

Démonstration de la règle.

1°. Si l'on soustrait le plus petit diviseur $\frac{s-d}{2}$ du plus grand $\frac{s+d}{2}$, le reste sera d; donc la différence des diviseurs est d.

2°. Si

2°. Si le devidende a est divisé séparément par les deux diviseurs $\frac{s-d}{2}$ & $\frac{s+d}{2}$, les deux quotiens seront $\frac{2a}{s-d}$ & $\frac{2a}{s+d}$ respectivement, dont le premier sera le plus grand comme ayant un plus petit dénominateur; ainsi la différence des quotiens est $\frac{2a}{s-d} - \frac{2a}{s+d} = \frac{2as+2ad-2as+2ad}{ss-dd}$ $= \frac{4ad}{ss-dd} = \frac{4ad}{\frac{4ad}{b}}$ par la règle, $=b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

On demande deux diviseurs dont la différence soit 1, & qui divisant séparément un nombre donné tel que 144, produisent deux quotiens dont la différence soit 2. Ici $a=144$, $b=2$, $d=1$, $\frac{4ad}{b}+dd$ ou $ss=289$, $s=17$, $\frac{s+d}{2}=9$, $\frac{s-d}{2}=8$; donc les diviseurs sont 8 & 9, & les quotiens 18 & 16.

S C H O L I E.

Si dans le dernier problême nous avions mis x pour la plus grande quantité, & $x-d$ pour la plus petite, l'équation auroit été $\frac{a}{x-d} - \frac{a}{x} = b$, ou $\frac{ad}{xx-dx} = b$, qui est différente de l'autre, & par conséquent dans cette équation les deux racines ne seroient pas les nombres cherchés, mais les deux valeurs différentes de x, le plus petit de ces nombres.

P R O B L E M E 28. (Voyez Art. 118.)

162. *On demande un nombre, qui étant ajoûté à sa racine quarrée fasse* a.

S O L U T I O N.

Nommez le nombre cherché xx, & vous aurez cette équation, $xx+1x=a$; donc $xx+1x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}=\frac{4a+1}{4}=\frac{ss}{4}$ donc $x+\frac{1}{2}=\pm\frac{s}{2}$; & $x=\frac{s-1}{2}$ ou $\frac{-s-1}{2}$: En supposant $x=\frac{s-1}{2}$, on a $xx=\frac{ss-2s+1}{4}$; mais si la grandeur x étoit supposée égale à $\frac{-s-1}{2}$, on auroit $xx=\frac{ss+2s+1}{4}$; d'où se déduit la règle suivante.

Faites $4a+1=ss$, *& le nombre cherché sera* $\frac{ss-2s+1}{4}$, *ou* $\frac{ss+2s+1}{4}$, *suivant que la racine quarrée ajoûtée sera prise affirmativement ou négativement.*

D E-

DEMONSTRATION.

1r. *Cas*, si au nombre $\frac{ss-2s+1}{4}$ on ajoûte la racine quarrée affirmative $\frac{s-1}{2}$, ou $\frac{2s-2}{4}$, la somme sera $\frac{ss-1}{4}=a$, par la règle.

2d. *Cas*, si au nombre $\frac{ss+2s+1}{4}$ on ajoûte la racine quarrée négative $\frac{-s-1}{2}$ ou $\frac{-2s-2}{4}$, la somme sera $\frac{ss-1}{4}=a$, comme il a été dit. C. Q. F. D.

PROBLEME 29. (Voyez Art. 129.)

163. *On demande trois nombres en proportion continue, dont la somme soit* a, *& la somme de leurs quarrés* ab.

Donc b (ou $\frac{ab}{a}$) est le quotient de la somme des quarrés divisée par la somme des nombres: expression dont il sera bon de se souvenir, parce qu'elle facilite le calcul suivant.

SOLUTION.

Nommez les trois nombres cherchés x, y & z; comme ces nombres sont en proportion continue, c'est-à-dire, que x est à y, comme y est à z, nous aurons $yy=xz$; de plus, puisque par la supposition $x+y+z=a$, il faut que $a-y$ soit $=x+z$; & si on éléve les deux membres à la seconde puissance $a^2-2ay+yy=xx+2yz+zz$; retranchez y^2 d'un côté, & la quantité qui lui est égale xz de l'autre, & vous aurez $aa-2ay$ $=xx+xz+zz=xx+yy+zz=ab$; puis donc que $aa-2ay=ab$, divisez les deux membres de cette équation par a, & vous aurez $a-2y=b$, & y (le terme moyen) $=\frac{a-b}{2}$; retranchez cette grandeur de a, somme des trois nombres cherchés, & vous aurez $\frac{a+b}{2}$ pour la somme des extrêmes; nommez cette somme $2l$, & désignons $\frac{a-b}{2}$, ou le terme moyen, par la lettre m; cela étant, comme x est un des extrêmes, $2l-x$ sera l'autre, & le produit des extrêmes se trouvera être $2lx-xx=m^2$; par conséquent $xx-2lx=-m^2$, & $xx-2lx+l^2=l^2-m^2=n^2$, & $x-l=\pm n$, & $x=l\pm n$; d'où l'on peut déduire la règle suivante.

Faites $\frac{a+b}{2}=2l$, $\frac{a-b}{2}=m$, & l^2-m^2 n^2, & *les trois nombres cherchés seront* $\overline{l+n}$, m & $\overline{l-n}$.

DEMONSTRATION.

1°. Puisque par la suppofition $n^2 = l^2 - m^2$, nous avons $m^2 = l^2 - n^2 = \overline{l+n} \times \overline{l-n}$; donc les trois nombres $\overline{l+n}$, m, & $\overline{l-n}$ font en proportion continue, le quarré du terme moyen étant égal au rectangle des extrêmes; ce qui fatisfait à la premiére condition du problême.

2°. Si l'on ajoûte enfemble les trois nombres $\overline{l+n}$, m, & $\overline{l-n}$, leur fomme fera $2l + m = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ par la règle $= a$; ce qui fatisfait à la feconde condition: pareillement, fi m ou $\frac{a-b}{2}$ eft retranché de $2l$ ou de $\frac{a+b}{2}$, il reftera $2l - m = b$.

3°. Le quarré de $\overline{l+n}$ eft $l^2 + 2ln + n^2$, le quarré de m eft m^2, & le quarré de $\overline{l-n}$ eft $l^2 - 2ln + n^2$; ajoûtez enfemble ces trois quarrés, & leur fomme fera $2l^2 + m^2 + 2n^2 = 2l^2 + m^2 + 2l^2 - 2m^2$ par la règle, $= 4l^2 - m^2 = \overline{2l+m} \times \overline{2l-m} = ab$: donc toutes les conditions du problême fe trouvent remplies. C. Q. F. D.

Exemple pour la règle précédente.

Que la fomme des trois nombres foit 19, & celle de leurs quarrés 133; donc nous avons $a = 19$, $b = \frac{133}{19} = 7$, $\frac{a+b}{2}$ ou $2l = 13$, $l = \frac{13}{2}$, $\frac{a-b}{2}$, ou $m = 6$, $l^2 - m^2$ ou $n^2 = \frac{25}{4}$, $n = \frac{5}{2}$, $l + n = 9$, $l - n = 4$; donc les nombres cherchés font 9, 6 & 4, ou 4, 6 & 9.

PROBLEME 30.

164. *On demande quatre nombres en proportion continue, & tels que la fomme des extrêmes foit* a, *& celle des termes moyens* b.

N. B. Nous avons expliqué ci-deffus Art. 128. ce qu'il falloit entendre par quatre quantités en proportion continue

SOLUTION.

Pour les deux termes du milieu mettez x & y; en ce cas l'un des extrêmes fe trouvera en difant, comme y eft à x ainfi x eft à $\frac{xx}{y}$, & l'autre en difant, comme x eft à y ainfi y eft à $\frac{yy}{x}$; les extrêmes font donc $\frac{xx}{y}$ & $\frac{yy}{x}$, & leur fomme $\frac{x^2}{y} + \frac{yy}{x} = \frac{x^3 + y^3}{xy}$; ainfi les équations fon-

damen-

damentales sont, 1°. $x+y=b$, ou $x=b-y$; & 2°. $\frac{x^3+y^3}{xy}=a$, ou $x^3+y^3=axy$; au-lieu de x dans cette dernière équation mettez $b-y$, qui est sa valeur dans la première équation, & vous aurez $x^3=b^3-3bby+3byy-y^3$, & $x^3+y^3=b^3-3bby+3byy$; vous aurez aussi axy, ou $ay\times\overline{b-y}=aby-ayy$; ainsi les équations seront présentement $3byy-3bby+b^3=aby-ayy$; transposez b^3, comme aussi $aby-ayy$, & l'équation se trouvera être $\overline{ayy+3byy}-\overline{aby-3bby}=-b^3$, ou ainsi, $\overline{yy-by}\times\overline{a+3b}=-b^3$; par conséquent $yy-by=\frac{-b^3}{a+3b}$, & $yy-by+\frac{bb}{4}=\frac{bb}{4}-\frac{b^3}{a+3b}=\frac{abb-b^3}{4a+12b}=\frac{bb}{4}\times\frac{a-b}{a+3b}=\frac{bb}{4}\times ss=\frac{bbss}{4}$; tirez la racine quarrée de $yy-by+\frac{bb}{4}$ d'un côté, & de $\frac{bbss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $y-\frac{b}{2}=\pm\frac{bs}{2}$, & $y=\frac{b}{2}\pm\frac{bs}{2}=\frac{b}{2}\times\overline{1\pm s}$; & comme l'équation sera la même, quel des deux termes moyens soit représenté par y, le plus grand ou le plus petit, nous avons la règle suivante:

Faites $\frac{a-b}{a+3b}=ss$, *& vous aurez* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$ *pour le plus grand des deux termes moyens, &* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ *pour le plus petit.*

Les termes moyens étant ainsi trouvés à l'aide de la règle précédente, les extrêmes se déduiront aisément de la nature de la proportion continue comme ci-dessus, en disant, *comme* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ *est à* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$, *ou comme* $1-s$ *est à* $1+s$, *ainsi* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$ *à* $\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}$; *donc* $\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}$ *est le plus grand extrême: & comme* $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$ *est à* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$, *ou comme* $1+s$ *est à* $1-s$, *ainsi* $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ *est à* $\frac{b}{2}+\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}$; *donc* $\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}$ *est le plus petit des deux extrêmes; & les quatre nombres, en mettant le plus grand extrême le premier, seront rangés dans l'ordre suivant;* $\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}$, $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}$; $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}$ & $\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}$.

DEMONSTRATION.

Il est bien clair que ces quatre nombres doivent être en proportion continue: car c'est en conséquence de cette supposition que les extrê-

mes ont été trouvés; & il n'est pas moins clair que les deux termes moyens ajoûtés ensemble sont égaux à b; car $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}+\frac{b}{2}\times\overline{1-s}=\frac{b}{2}\times 2=b$; donc il nous reste simplement à prouver, que la somme des extrêmes est a: voyons pour cet effet si $\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}+\frac{b}{2}\times\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}=a$, ou bien, divisant l'équation par $\frac{b}{2}$, nous aurons $\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}+\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}=\frac{2a}{b}$: or $\frac{\overline{1+s}^2}{1-s}$ & $\frac{\overline{1-s}^2}{1+s}$ ajoûtés ensemble font $\frac{\overline{1+s}^3+\overline{1-s}^3}{1-ss}$; mais $\overline{1+s}^3=1+3s+3ss+s^3$, & $\overline{1-s}^3=1-3s+3ss-s^3$; donc $\frac{\overline{1+s}^3+\overline{1-s}^3}{1-ss}=\frac{2+6ss}{1-ss}=\frac{2a}{b}$: pour achever de résoudre le problême, il faut examiner séparément le numérateur $2+6ss$, & le dénominateur $1-ss$. Suivant la règle indiquée ci-dessus $ss=\frac{a-b}{a+3b}$; donc $6ss=\frac{6a-6b}{a+3b}$; donc $2+6ss$ ou le numérateur $=\frac{2}{1}+\frac{6a-6b}{a+3b}=\frac{8a}{a+3b}$: de plus $ss=\frac{a-b}{a+3b}$; par conséquent $-ss=\frac{-a+b}{a+3b}$; & $1-ss$, ou le dénominateur est égal à $\frac{1}{1}\frac{-a+b}{a+3b}=\frac{4b}{a+3b}$; ainsi $\frac{2+6ss}{1-ss}=$ à une fraction dont le numérateur est $\frac{8a}{a+3b}$, & dont le dénominateur est $\frac{4b}{a+3b}$; mais une pareille fraction est égale à $\frac{8a}{4b}$ ou $\frac{2a}{b}$; donc $\frac{2+6ss}{1-ss}$, ou la somme des extrêmes après avoir été divisée par $\frac{b}{2}=\frac{2a}{b}$; donc avant que cette division fût faite, la somme des extrêmes étoit a. C. Q. F. D.

Exemple pour la règle précédente.

Que la somme des extrêmes soit 27 & celle des termes moyens 18, & vous aurez $a=27$ $b=18$ $\frac{a-b}{a+3b}$ ou $ss=\frac{9}{81}=\frac{1}{9}$, $s=\frac{1}{3}$, $1+s=\frac{4}{3}$, $1-s=\frac{2}{3}$, $\frac{b}{2}\times\overline{1+s}=12$, $\frac{b}{2}\times\overline{1-s}=6$, ce qui donne pour les termes moyens 12 & 6; d'où il suit que les extrêmes sont 24 & 3, & que les quatre nombres doivent être 24, 12, 6, 3, ou 3, 6, 12 & 24.

PRO-

PROBLEME 31.

165. *On demande deux nombres, dont la somme ajoûtée à la somme de leurs quarrés soit* a, *& dont la différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés soit* b.

SOLUTION.

Mettez x & y pour les deux nombres cherchés, & l'équation fondamentale sera 1°, $x+y+x^2+y^2=a$; 2°, $x-y+x^2-y^2=b$: ces équations, disposées dans l'ordre où elles doivent l'être, seront,

Eq. 1. $xx+x+yy+y=a$.
Eq. 2. $xx+x-yy-y=b$.

Ajoûtez ensemble ces deux équations, & vous aurez $2xx+2x=a+b$; ainsi $xx+1x=\frac{a+b}{2}$, & $xx+1x+\frac{1}{4}=\frac{a+b}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2a+2b+1}{4}=\frac{rr}{4}$; tirez la racine quarrée de $xx+1x+\frac{1}{4}$ d'un côté, & de $\frac{rr}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x+\frac{1}{2}=\frac{r}{2}$, & $x=\frac{r-1}{2}$: de plus, retranchez la seconde équation de la premiére, & vous aurez $2y^2+2y=a-b$; & $y^2+y=\frac{a-b}{2}$ & $y^2+1y+\frac{1}{4}=\frac{2a-2b+1}{4}=\frac{ss}{4}$; donc $y+\frac{1}{2}=\frac{s}{2}$, & $y=\frac{s-1}{2}$; ce qui nous fournit la régle suivante.

Faites $2a+2b+1=rr$, *&* $2a-2b+1=ss$, *& vous aurez le plus grand nombre égal à* $\frac{r-1}{2}$, *& le plus petit à* $\frac{s-1}{2}$.

DEMONSTRATION.

La somme de $\frac{r-1}{2}$ & de $\frac{s-1}{2}$ est $\frac{r+s-2}{2}$ ou $\frac{2r+2s-4}{4}$.

Le quarré de $\frac{r-1}{2}$ est $\frac{r^2-2r+1}{4}$.

Le quarré de $\frac{s-1}{2}$ est $\frac{s^2-2s+1}{4}$.

Donc la somme de leurs quarrés est $\frac{r^2+s^2-2r-2s+2}{4}$; ajoûtez à cette somme celle des nombres trouvés ci-dessus, savoir $\frac{2r+2s-4}{4}$; & vous aurez la somme des nombres ajoûtée à celle de leurs quarrés égale à $\frac{r^2+ss-2}{4}$; mais $r^2+s^2=4a+2$ par la règle; par conséquent $rr+ss-2=4a$, & $\frac{r^2+s^2-2}{4}$, ou la somme des nombres ajoûtée à la somme

 de

de leurs quarrés $= a$: de plus, la différence de $\frac{r-1}{2}$ & de $\frac{s-1}{2}$ est $\frac{r-s}{2}$ ou $\frac{2r-2s}{4}$; & la différence de leurs quarrés est $\frac{r^2-s^2+2s-2r}{4}$; donc la différence des nombres ajoûtée à la différence de leurs quarrés est $\frac{r^2-s^2}{4} = \frac{4b}{4}$ en vertu de la règle, $= b$. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

Que la somme des nombres ajoûtée à la somme de leurs quarrés soit 26, & leur différence ajoûtée à la différence de leurs quarrés 14, & nous aurons $a = 26$, $b = 14$, $2a + 2b + 1$ ou $rr = 81$, $r = 9$, $\frac{r-1}{2} = 4$, $2a - 2b + 1$, ou $ss = 25$, $s = 5$, $\frac{s-1}{2} = 2$, & par conséquent les nombres cherchés seront 4 & 2.

PROBLEME 32.

166. *On demande deux nombres, dont la somme des quarrés soit* a, & *qui donnent pour produit de leur multiplication* b.

SOLUTION.

Pour les deux nombres cherchés mettez x & $\frac{b}{x}$, & la somme de leurs quarrés sera $x^2 + \frac{b^2}{x^2} = a$; donc $x^4 + b^2 = ax^2$; donc $x^4 - ax^2 = -bb$; & $x^4 - axx + \frac{aa}{4} = \frac{aa}{4} - bb = \frac{aa-4bb}{4} = \frac{ss}{4}$; tirez la racine quarrée de $x^4 = ax^2 + \frac{aa}{4}$ d'un côté, & de $\frac{ss}{4}$ de l'autre, & vous aurez $x^2 - \frac{a}{2} = \pm \frac{s}{2}$ & $x^2 = \frac{a \pm s}{2}$; & puisque cette équation reste la même, quelle des quantités inconnues que x puisse représenter, nous avons la règle suivante.

Faites aa − 4bb = ss, & *le quarré du plus grand nombre sera égal à* $\frac{a+s}{2}$, & *le quarré du plus petit égal à* $\frac{a-s}{2}$.

DEMONSTRATION.

Si le quarré du plus grand nombre qui est $\frac{a+s}{2}$, est ajoûté au quarré du

du plus petit nombre qui est $\frac{a-s}{2}$, la somme de leurs quarrés sera $\frac{2a}{2}$ ou a: de plus, si le quarré du plus grand nombre qui est $\frac{a+s}{2}$, est multiplié par le quarré du plus petit nombre qui est $\frac{a-s}{2}$, le produit de ces deux quarrés sera $\frac{aa-ss}{4} = \frac{aa-aa+4bb}{4}$ par la règle, $= \frac{4bb}{4} = bb$; mais si le quarré du plus grand nombre multiplié par le quarré du plus petit donne bb, le plus grand nombre multiplié par le plus petit donnera b. *C. Q. F. D.*

Exemple pour la règle précédente.

Que la somme des deux nombres cherchés soit 400, & le produit de leur multiplication 192; nous aurons en ce cas $a=400$, $b=192$, a^2-4b^2 ou $s^2=12544$, $s=112$, $\frac{a+s}{2}$ ou le quarré du plus grand nombre $=256$, $\frac{a-s}{2}$ ou le quarré du plus petit nombre $=144$; donc le plus grand nombre est 16, & le plus petit 12.

PROBLEME 33.

167. *Une pierre tombe dans un puits vuide d'eau, & quelque tems après on entend la pierre donner contre le fond: on demande, le tems que la pierre met à tomber étant donné, quelle est la profondeur du puits.*

SOLUTION.

La solution de ce problême est fondée sur trois principes, que nous supposerons accordés. Le premier est, que les espaces qu'un corps qu'on laisse tomber parcourt, sont comme les quarrés des tems que dure sa chûte: ainsi l'espace décrit en deux secondes, est à l'espace décrit en trois secondes, non comme 2 à 3, mais comme 4 à 9. Le second principe est, qu'en faisant abstraction de la résistance de l'air, qui n'entre point en ligne de compte ici, tous les corps, grands & petits, pesans & légers, sont également accélérés, & parcourent le même espace dans le même tems. La troisiéme supposition porte, que tous les sons, au-moins ceux qui sont assez forts pour affecter nos sens, traversent l'air avec la même vitesse, & par cela même décrivent des espaces qui sont entre eux comme les tems de leur mouvement. Le premier de ces principes a été démontré il y a long-tems par *Galilée*, qui en est l'inventeur, & les deux autres l'ont été par *Newton*. Ces principes étant admis, supposons que x désigne la profondeur

deur du puits, a l'espace qu'un corps, qui commence à se mouvoir, parcourt durant une seconde, b l'espace qu'un son traverse dans le même tems, & c le tems donné en secondes depuis que la pierre a été lâchée jusqu'à l'instant qu'on a ouï le son: pour savoir présentement quel tems la pierre met à descendre jusqu'au fond du puits, dites, comme l'espace a est à l'espace x, savoir la profondeur du puits, ainsi 1, quarré du tems durant lequel le premier espace est décrit, savoir le quarré d'une seconde, est à $\frac{x}{a}$, quarré du tems durant lequel est décrit le dernier espace; ainsi $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$ représentera le tems que la pierre met à parcourir toute la profondeur du puits: de plus, pour trouver le tems que le son a mis à venir du fond du puits, dites, comme l'espace b est à l'espace x, ainsi une seconde, tems durant lequel le premier de ces espaces est décrit, est à $\frac{x}{b}$, tems durant lequel est décrit le dernier espace: mais ces tems ajoûtés ensemble, c'est-à-dire, le tems que la pierre met à descendre, & celui que le son met à monter, font tout le tems c; donc nous avons cette équation, $\frac{x}{b}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}=c$; par conséquent $x+\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}=bc$. C'est-là une espéce d'équation du second degré, x étant le quarré de $\sqrt{x}$; ou du-moins cette équation doit se résoudre comme si elle étoit du second degré, parce qu'elle en a la forme. Ici le coëfficient du second terme est $\frac{b}{\sqrt{a}}$, dont la moitié est $\frac{b}{2\sqrt{a}}$; le quarré de cette grandeur est $\frac{bb}{4a}$, lequel étant ajoûté aux deux membres de l'équation, donne $x+\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{bb}{4a}=\frac{bb}{4a}+bc$ $=\frac{bb+4abc}{4a}$: faites $bb+4abc=ss$, & vous aurez $x+\frac{b\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{bb}{4a}=\frac{ss}{4a}$; en tirant la racine quarrée des deux membres, nous aurons $\sqrt{x}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ $=\pm\frac{s}{2\sqrt{a}}$; donc $\sqrt{x}=\frac{-b\pm s}{2\sqrt{a}}$, c'est-à-dire, $\sqrt{x}=\frac{-b-s}{2\sqrt{a}}$, ou $\frac{-b+s}{2\sqrt{a}}$: la première de ces racines est négative, & la derniére affirmative; mais la nature du problême ne permet point de supposer que $\sqrt{x}$ soit négative; car il faut être d'accord avec soi-même; & si l'on suppose $\sqrt{x}$ négative dans une partie de la solution, il faut la supposer telle aussi dans *tout* le reste; d'où il s'ensuivroit que $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, tems que la pierre met à arriver au fond du puits, est pareillement une quantité négative, ce qui est absurde; c'est pour cela que je rejette la racine négative $\frac{-s-b}{2\sqrt{a}}$, & que je

retiens

retiens la racine affirmative $\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$, faisant $\sqrt{x}=\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$, & par conséquent x, profondeur du puits $=\frac{\overline{s-b}^2}{4a}$.

Si l'on demande comment j'ai sçu que la racine $\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$ étoit affirmative, je réponds que ç'a été en observant, que ss étant égal à $bb+4abc$, doit être plus grand que bb; donc s est plus grand que b, & par conséquent $s-b$ est une quantité affirmative, de-même que $\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$: on auroit pu trouver la même chose en faisant passer tous les termes de l'équation dans un des membres, c'est-à-dire en faisant $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}+\frac{x}{b}-c=0$; (Voyez Art. 109.); mais continuons: puisque $x=\frac{\overline{s-b}^2}{4a}$, nous aurons $\sqrt{x}=\frac{s-b}{2\sqrt{a}}$, & $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}}$, ou le tems que la pierre met à descendre jusqu'au fond du puits, égal à $\frac{s-b}{2a}$; nous aurons aussi $\frac{x}{b}$, c'est-à-dire, le tems qu'il a fallu au son pour parcourir le même espace, égal à $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$; d'où l'on peut déduire la règle suivante:

Faites $bb+4abc$ *égal à* ss, *& vous aurez la profondeur du puits égale à* $\frac{\overline{s-b}^2}{4a}$, *le tems que la pierre met à tomber égal à* $\frac{s-b}{2a}$, *& celui qu'il faut au son pour arriver au haut du puits égal à* $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$.

DEMONSTRATION.

Si la profondeur du puits est bien assignée, le tems que la pierre met à descendre, & celui qu'il faut au son pour monter, ajoûtés ensemble font tout le tems c, c'est-à-dire tout le tems qui s'est écoulé depuis l'instant que la pierre a été lâchée jusqu'à celui où le son a été ouï: or le tems que la pierre a mis à tomber étoit $\frac{s-b}{2a}$ ou $\frac{2bs-2bb}{4ab}$, en multipliant le numérateur & le dénominateur par $2b$; & le tems qu'il a fallu au son pour monter étoit $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$ ou $\frac{s^2-2bs+bb}{4ab}$; ajoûtez ensemble ces deux tems, savoir $\frac{s^2-2bs+bb}{4ab}$, & $\frac{2bs-2bb}{4ab}$, & la somme sera $\frac{s^2-b^2}{4ab}=\frac{4abc}{4ab}$, par la règle, $=c$. C. Q. F. D.

SCHOLIE

Mr. *Huygens*, fameux par un grand nombre de découvertes également curieuses & utiles, ayant observé que la longueur d'un Pendule qui bat des secondes, est de 3 pieds 8 lignes & demie mesure de *Paris*, & ayant trouvé de plus avec une sagacité étonnante ce beau théorême, que le tems de la chûte verticale d'un corps par la demie-longueur d'un pendule est au tems d'une vibration de ce même pendule, comme le diamétre du cercle à la circonférence; a démontré à l'aide de ces deux découvertes, & du théorême de *Galilée* dont nous avons eu occasion de parler, que l'espace qu'un corps parcourt pendant la premiére seconde qu'il a commencé à tomber, est de $15\frac{1}{12}$ pieds mesure de *Paris*, ou plus exactement 15 .0957 pieds de cette mesure, c'est-à-dire, 16 .1222 pieds d'*Angleterre*, 1000 pieds mesure de *Paris* faisant 1068 pieds d'*Angleterre*. Que si nous avons l'obligation de cette vérité à *Huygens*, nous ne sommes guéres moins redevables à notre savant compatriote Mr. *Derham*, qui par ses expériences & ses observations sur le mouvement des sons partis d'une distance bien plus considérable que celle dont on avoit fait usage avant lui pour déterminer la vitesse de ce mouvement, a trouvé que le son parcourt à peu près 1142 pieds en une seconde: donc 16 .1222 pieds marquent l'espace que dans la solution du dernier problême nous avons appellé a, & 1142 pieds désignent celui que nous avons appellé b; donc $4a = 64 .4888$, & $4ab = 73646$, & $bb = 1304164$. Ayant donc par le calcul la valeur de b^2 & de $4ab$, qui dans tous les cas sera toujours la même, la solution du problême précédent deviendra beaucoup plus facile: comme par exemple, supposons que le tems, qui s'est écoulé depuis le commencement de la chûte jusqu'à l'ouïe du son, étoit de de 10 secondes, nous aurons $c = 10$, $4abc = 736460$, $bb + 4abc$, ou $ss = 2040624$, $s = 1428 .5$. $s - b = 286 .5$, $\overline{s-b}^2 = 82082 .25$; ce dernier nombre divisé par $4a$ ou $64 .49$, donne 1273 pieds pour la profondeur du puits: de plus le tems que la pierre a mis à descendre étoit $\frac{s-b}{2a}$ par la règle; mais la quantité $s-b$ a déjà été trouvée égale à 286.5, & ce nombre divisé par $2a$ ou 32 .24, donne 8 .89 secondes pour le tems que la pierre a mis à descendre: enfin, le tems qu'il a fallu au son pour monter étoit, suivant la règle, $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$, trouvé $= 1273$; divisez cette grandeur par b ou 1142, & vous aurez $\frac{\overline{s-b}^2}{4ab}$, ou le tems qu'il a fallu au

au son pour monter, égal à 1 .11 d'une seconde: ajoûtez ce tems à l'autre, savoir, 8 .89 secondes, & tout le tems sera de 10 secondes, comme cela se devoit.

Si quelqu'un souhaite de voir comment l'espace qu'un corps parcourt pendant la premiére seconde qu'il commence à tomber, se déduit du théorême de *Huygens* indiqué ci-dessus, il n'a qu'à suivre le fil de la démonstration suivante: soit l la longueur d'un pendule qui bat des secondes: cela étant, en vertu du théorême, le tems pendant lequel un corps, qui commence à tomber, parcourt un espace égal à $\frac{1}{2}l$, sera au tems d'une oscillation du pendule dont la longueur est l, comme le diamétre d'un cercle est à la circonférence; mais le tems d'une oscillation du pendule l est une seconde par l'hypothése; ou si nous désignons par s l'espace inconnu qu'un corps parcourt pendant la premiére seconde qu'il commence à tomber, le tems d'une oscillation du pendule l sera le même que celui que le corps mettra à parcourir l'espace s, & on aura l'analogie suivante: le tems de la descente par $\frac{1}{2}l$ sera au tems de la descente par s, comme le diamétre d'un cercle est à la circonférence; & par cela même le quarré du premier de ces tems est au quarré du second, comme le quarré du diamétre est au quarré de la circonférence; de plus le quarré du tems de la descente par $\frac{1}{2}l$ est au quarré du tems de la descente par s, comme $\frac{1}{2}l$ est à s; donc $\frac{1}{2}l$ est à s, comme le quarré du diamétre d'un cercle est au quarré de la circonférence; mais le diamétre d'un cercle est à la circonférence comme 113 à 355 (Voyez Schol. 1. de l'Art. 179;) & le quarré de la premiére de ces quantités est au quarré de la seconde comme 12769 est à 126025; de plus l, longueur du pendule qui bat des secondes, est de 3 pieds $8\frac{1}{2}$ lignes, mesure de *Paris*, c'est-à-dire, (Introd. Art. 23.) 3 .059028 pieds; ainsi $\frac{1}{2}l=1$ .529514 d'un pied; dites donc, comme 12769 à 126025, ainsi 1 .529514 à 15 .0957; & vous aurez $s=15$ .0957 pieds mesure de *Paris*, ou 16. 1222 pieds mesure d'*Angleterre*.

On peut déduire de-là par voye de corollaire, que comme le quarré du diamétre d'un cercle est au quarré de la circonférence, ainsi la moitié de la longueur d'un pendule est à l'espace qu'un corps, qui commence à se mouvoir, parcourt durant le tems d'une oscillation de ce pendule.

SOLUTION DE DEUX PROBLEMES

PAR MR. ABRAHAM DE MOIVRE.

MR. DE MOIVRE, qui est incontestablement un des principaux Mathématiciens de notre siécle, m'a communiqué les solutions élégantes des deux problêmes suivans au sujet des quantités proportionnelles, en me permettant d'en faire part au Public. Je donne le tout ici précisément tel qu'il me l'a envoyé.

PROBLEME I.

La somme de quatre quantités en proportion continue étant donnée, comme aussi la somme de leurs quarrés, trouver les proportionnelles.

SOLUTION.

Que les quatre quantités proportionnelles soient x^3, xxy, xyy, y^3: que leur somme soit $=a$, & la somme de leurs quarrés $=b$: cela étant, nous aurons les deux équations suivantes;

$$x^3+xxy+xyy+y^3=a, \text{ \&}$$
$$x^6+x^4yy+xxy^4+y^6=b.$$

La premiére équation est réduite à

$$\overline{x+y}\times\overline{xx+yy}=a: \text{ la seconde à}$$
$$\overline{xx+yy}\times\overline{x^4+y^4}=b.$$

La premiére équation réduite me détermine à supposer

$$x+y=z,$$
$$xx+yy=v:$$

Ainsi la premiére équation est changée en

$$zv=a.$$

Par rapport à la seconde, je dis, puisque $x+y=z$, si j'éléve les deux membres au quarré, j'aurai,

$$xx+2xy+yy=zz;$$

mais $xx+yy$ a été supposé $=v$;

donc $2xy+v=zz$,

& $2xy=zz-v$,

& $4xxyy=z^4-2vzz+vv$:

De plus $xx+yy=v$,

donc $x^4+2xxyy+y^4=vv$:

Mais la seconde équation réduite est

$$\overline{xx+yy}\times\overline{x^4+y^4}=b, \text{ ou}$$
$$v\times\overline{x^4+y^4}=b;$$

donc $x^4+y^4=\frac{b}{v}$;

de-

de-sorte qu'à l'équation que nous avons eue, savoir $x^4 + 2xxyy + y^4 = vv$, nous pouvons substituer

$$\frac{b}{v} + 2xxyy = vv, \text{ ou}$$

$$2xxyy = vv - \frac{b}{v}, \text{ ou}$$

$$4xxyy = 2vv - \frac{2b}{v}: \text{ mais ci-dessus}$$

$$4xxyy = z^4 - 2vzz + vv;$$

donc $$2vv - \frac{2b}{v} = z^4 - 2vzz + vv, \text{ ou}$$

$$vv - \frac{2b}{v} = z^4 - 2vzz;$$

Par la transformation de la premiére équation nous avons eu $zv = a$;

donc $$v = \frac{a}{z};$$

& cette valeur de v étant substituée, nous aurons

$$\frac{aa}{zz} - \frac{2bz}{a} = z^4 - 2az, \text{ ou}$$

$$z^6 \begin{matrix} + \frac{2b}{a} z^3 \\ - 2az^3 \end{matrix} = aa,$$ ce qui est une espéce d'équation du second degré.

L'inconnue z étant déterminée dans cette équation, v le sera aussi; aprés quoi l'on trouvera sans peine les valeurs de x & de y; car

$$x = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{2v - zz}, \text{ \&}$$

$$y = \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{2v - zz};$$ comme on ne sauroit en douter si l'on considére que par la supposition $x + y = z$, &

$$xx + yy = v:$$

Elevez la premiére de ces équations au quarré, & vous aurez

$$xx + 2xy + yy = zz;$$ mais la seconde équation est

$$xx \quad + yy = v;$$ & leur différence,

$$2xy = zz - v;$$ nous avons donc

$$xx - 2xy + yy = v - zz + v = 2v - zz;$$

par conséquent $$x - y = \sqrt{2v - zz};$$

mais $$x + y = z;$$

donc $$2x = z + \sqrt{2v - zz},$$

& $$x = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\sqrt{2v - zz}.$$

Il est manifeste outre cela que $2y = z - \sqrt{2v - zz}$;

par conséquent $$y = \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}\sqrt{2v - zz}.$$

Ainsi les quatre proportionnelles sont connues.

Probleme 2.

La somme de cinq nombres en proportion Géométrique, & la somme de leurs quarrés, étant données, on demande les nombres mêmes.

Solution.

Soit la somme des proportionnelles a, & celle de leurs quarrés b; cela étant, nous aurons ces deux équations;

$$x^4 + x^3 y + xxyy + xy^3 + y^4 = a, \ \&$$
$$x^8 + x^6 yy + x^4 y^4 + xxy^6 + y^8 = b.$$

La premiére* peut se réduire à $\frac{x^5 - y^5}{x - y} = a$;

La seconde à $\frac{x^{10} - y^{10}}{xx - yy} = b$.

Divisez la seconde de ces équations par la premiére, & vous aurez

$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = \frac{b}{a}$; ou en amplifiant cette équation

$$x^4 - x^3 y + xxyy - xy^3 + y^4 = \frac{b}{a}.$$

Placez au-dessous de cette équation la premiére équation originale, qui est

$$x^4 + x^3 y + xxyy + xy^3 + y^4 = a.$$

Ajoûtez ensemble ces deux équations, & il en résultera

$$2x^4 + 2xxyy + 2y^4 = a + \frac{b}{a}, \text{ ou}$$
$$x^4 + xxyy + y^4 = \tfrac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}b}{a} = s,$$

(en faisant, pour rendre le calcul plus simple, $\frac{1}{2}a + \frac{\frac{1}{2}b}{a} = s$.)

Mais si, au-lieu d'ajoûter ces équations, on retranche présentement l'équation supérieure de celle qui est au-dessous, on aura

$$2x^3 y + 2xy^3 = a - \frac{b}{a}, \text{ ou}$$
$$x^3 y + xy^3 = \tfrac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}b}{a}, \text{ ou}$$
$$xy \times \overline{xx + yy} = \tfrac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}b}{a}.$$

Pour abréger, nous nommerons ces quantités connues d, ce qui nous donnera l'équation

$$xy \times \overline{xx + yy} = d.$$

Supposons $xy = z$, & $xx + yy = v$;
Ainsi $zv = d$.

Il

* Peut se réduire à $\frac{x^5 - y^5}{x - y}$ savoir, en multipliant & en divisant après cela le produit par cette même grandeur l'équation par $x - y$.

Il est question présentement d'exprimer l'autre équation $x^4+xxyy+y^4=s$ par le moyen de z & de v: mais puisque $xx+yy=v$, en élevant les deux membres au quarré, nous aurons

$x^4+2xxyy+y^4=vv$. En retranchant de cette équation celle-ci $x^4+xxyy+y^4=s$, que nous avions déja, il restera

$xxyy=vv-s$:

mais $xy=z$; donc $xxyy=zz$, &

$zz=vv-s$. Mais nous avions déja $zv=d$

L'inconnue z * étant exterminée, nous aurons

$\frac{dd}{vv}=vv-s$, ou $dd=v^4-svv$.

Il est facile de déterminer la valeur de v dans cette équation; v étant connue, z le sera aussi; après quoi x & y le seront pareillement; car

$x=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}+\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$

$y=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}-\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$, comme on ne sauroit en douter si l'on considére que par la supposition $xy=z$, &

$xx+yy=v$:

Car doublant la premiére de ces deux équations, nous aurons $2xy=2z$; en ajoûtant cette nouvelle équation à la seconde, il viendra $xx+2xy+yy=v+2z$; donc $x+y=\sqrt{v+2z}$.

De plus, si nous retranchons l'équation $2xy=2z$ de l'autre équation $xx+yy=v$, nous aurons $xx-2xy+yy=v-2z$; donc $x-y=\sqrt{v-2z}$. Or ces deux équations,

$x+y=\sqrt{v+2z}$

& $x-y=\sqrt{v-2z}$, donnent

$x=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}+\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$

& $y=\frac{1}{2}\sqrt{v+2z}-\frac{1}{2}\sqrt{v-2z}$.

N. B. Le jeune Algébriste sera peut-être bien aise de trouver ici un exemple pour chacune des solutions précédentes.

Exemple pour la solution du premier Problême.

Puisque $z^6=\frac{2aa-2b}{a}z^3+aa$, si à la place de $\frac{aa-b}{a}$ nous mettons d, nous aurons $z^6=2dz^3+aa$, & $z^3=d+\sqrt{dd+aa}$: soit $a=30$, $b=340$; cela étant $aa=900$, $aa-b=560$, $\frac{aa-b}{a}$ ou $d=\frac{56}{3}$, $aa+dd$ =

* *L'inconnue z étant exterminée.*) Il ne faut pour cela qu'élever au quarré les deux membres de l'équation $zv=d$, puis diviser la nouvelle équation par vv.

$= 900 + \frac{3136}{9} = \frac{11236}{9}$, $\sqrt{aa+dd} = \frac{106}{3}$, $d + \sqrt{aa+dd}$ ou $z^3 = 54 = 27 \times 2 = 27c^3$ (en désignant par c la racine cubique de 2,) $z = 3c$, $\frac{a}{z}$ ou $v = \frac{30}{3c} = \frac{10}{c} = \frac{10cc}{c^3} = 5cc$, $2v - zz = cc$, $\sqrt{2v - zz} = c$, $\frac{z + \sqrt{2v - zz}}{2}$ ou $x = 2c$, $\frac{z - \sqrt{2v - zz}}{2}$ ou $y = c$;

Donc les proportionnelles x^3, xxy, xyy, y^3,
ſont $8c^3$, $4c^3$, $2c^3$, $1c^3$,
ou 16, 8, 4, 2.

Exemple pour la ſolution du ſecond Problême.

Soit $a = 62$, $b = 1364$; en ce cas $aa = 3844$, $\frac{aa+b}{2a}$ ou $s = 42$, $\frac{aa-b}{2a}$ ou $d = 20$, $v^4 = 42vv + 400$, $vv = 21 + \sqrt{841} = 50 = 25 \times 2 = 25cc$ (en mettant c pour la racine quarrée de 2,) $v = 5c$, $\frac{d}{v}$ ou $z = \frac{20}{5c} = \frac{4}{c} = \frac{4c}{cc} = 2c$, $\sqrt{v + 2z} = \sqrt{9c} = 3\sqrt{c}$, $\sqrt{v - 2z} = \sqrt{c}$, $\frac{1}{2}\sqrt{v+2z} + \frac{1}{2}\sqrt{v - 2z}$ ou $x = 2\sqrt{c}$, $\frac{1}{2}\sqrt{v+2z} - \frac{1}{2}\sqrt{v - 2z}$ ou $y = \sqrt{c}$, $xx = 4c$, $xy = 2c$, $yy = c$.

Donc les proportionnelles x^4, x^3y, $xxyy$, xy^3, y^4,
ſont $16cc$, $8cc$, $4cc$, $2cc$, $1cc$;
ou 32, 16, 8, 4, 2.



ELE-

ELEMENS D'ALGEBRE.

LIVRE V.

En quels cas un Problême est susceptible de plusieurs réponses.

ART. 168. NOus avons déjà eu occasion d'observer ci-dessus, que si dans quelque Problême le nombre des conditions indépendantes est égal à celui des quantités inconnues, un pareil problême n'admettra qu'une seule solution; ou s'il en admet davantage, ces solutions ne laisseront pas d'être tellement déterminées, qu'il ne restera aucun lieu à des suppositions arbitraires: mais si les conditions étoient en plus petit nombre que les quantités inconnues, celles qui manquent pourroient être déterminées à discrétion par l'Analyste même; & comme rien ne limite son choix, il n'est pas surprenant que dans des cas de cette nature un problême soit susceptible d'une infinité de réponses, principalement quand les fractions peuvent être admises dans la solution: que s'il ne falloit que des nombres entiers pour résoudre le problême, en ce cas le nombre des réponses seroit quelquefois fini & quelquefois infini suivant la nature du problême. Ce que nous venons de dire sera suffisamment éclairci par les deux exemples suivans.

EXEMPLE I.

On demande deux nombres dont la somme soit égale à dix fois leur différence.

Il est manifeste qu'en appellant les deux nombres inconnus x & y, nous n'avons qu'une seule condition, & par cela même qu'une seule équation, savoir, $x+y=10x-10y$, laquelle donnera $x=\frac{11y}{9}$; & c'est-là tout ce que le problême exige. Ainsi l'Analyste est entiérement libre de substituer un nombre entier, avec une fraction adhérente, ou bien une simple fraction à la place de y, pourvu seulement qu'il fasse $x=\frac{11y}{9}$; & les deux quantités x & y résoudront le problême. Comme, par exemple, soit $y=\frac{1}{2}$; en ce cas x ou $\frac{11y}{9}$ sera $\frac{11}{18}$, & ces deux fractions $\frac{11}{18}$, & $\frac{1}{2}$ ou $\frac{9}{18}$, satisferont aux conditions du problême; car leur différence est $\frac{1}{9}$, & leur somme $\frac{10}{9}$. Mais si l'on avoit demandé que x & y

fussent

fussent des nombres entiers, il auroit nécessairement fallu substituer à la place de y un nombre divisible par 9 sans reste; or de pareils nombres peuvent se trouver à l'infini, tels que 9, 18, 27, 36 &c. Donc cette question est susceptible d'une infinité de réponses, tant en nombres entiers qu'en fractions.

EXEMPLE 2.

On demande deux nombres x & y, *dont la multiplication fasse un produit égal à dix fois leur différence.*

Cette équation sera $yx = 10x - 10y$, c'est-à-dire $x = \frac{10y}{10-y}$. Il faut nécessairement que la grandeur y soit ici plus petite que 10; car si y étoit $= 10$, la fraction $\frac{10y}{10-y}$ seroit infiniment grande, comme nous le ferons voir dans un autre endroit; & si la quantité y étoit plus grande que 10, alors $10 - y$, & par conséquent $\frac{10y}{10-y}$ formeroient une quantité négative, au-lieu que le problême n'est supposé avoir rapport qu'à des quantités affirmatives seulement: cependant comme il y a une infinité de fractions entre 0 & 10, & qu'on peut substituer celle de ces fractions qu'on voudra à la place de y, le problême sera susceptible d'une infinité de solutions, si des fractions sont admises; mais si l'on requiert que x & y soient des nombres entiers on n'a le choix que de neuf nombres à la place d'y, & peut-être pas même de tous les neuf, comme nous le ferons voir dans la suite. Pour trouver maintenant quel nombre entier substitué à la place de y, donnera aussi un nombre entier pour x, je réduis la quantité $\frac{10y}{10-y}$ à une autre plus simple, en divisant $10y$ par $10 - y$, ou plutôt par $-y + 10$, commençant mon opération ainsi: $10y$ divisés par $-y$ donnent -10, que je mets au quotient; puis multipliant le diviseur $-y + 10$ par le quotient -10, j'ai pour produit $+10y - 100$, lesquels étant soustraits du dividende $10y$, laissent 100 de reste; mais n'ayant pas dessein de pousser la division plus loin, je représente le reste du quotient par la fraction $\frac{100}{10-y}$; ainsi $x = \frac{100}{10-y} - 10$; ainsi pour que x puisse être un nombre entier, il est nécessaire que $\frac{100}{10-y}$ soit un pareil nombre; mais c'est ce qui se trouvera impossible, à moins que $10 - y$ ne soit quelqu'un des diviseurs de 100, c'est-à-dire, qui divise ce nombre sans reste: j'examine donc ensuite combien de pareils diviseurs le nombre de 100 admet entre les nombres qui sont au-dessous de 10, & je trouve quatre pareils diviseurs, savoir 1, 2, 4 & 5; donc si l'on sup-

pose

pose $10-y$ égal à quelqu'un de ces nombres, x ou $\frac{100}{10-y}-10$ fera nécessairement un nombre entier, & outre cela affirmatif; car aussi longtems que $10-y$ sera plus grand que rien & plus petit que 10, $\frac{100}{10-y}$ sera plus grand que $\frac{100}{10}$, c'est-à-dire que 10, & par conséquent $\frac{100}{10-y}-10$ ou x ne pourra qu'être affirmatif. Supposons donc premiérement, $10-y=1$, & nous aurons $y=9$, & $\frac{10y}{10-y}$, ou $x=90$. 2°, si $10-y=2$, nous aurons $y=8$, & $x=40$. 3°. Si $10-y=4$, nous aurons $y=6$, & $x=15$: Enfin, si $10-y=5$, nous aurons $y=5$ & $x=10$: ainsi cette question admet quatre solutions en nombres entiers, savoir, 90 & 9, 40 & 8, 15 & 6, & 10 & 5: solutions, qui satisfont toutes également à la condition du problême.

Après avoir donné au Lecteur un échantillon de ce qui appartient à ce chef, je ferai présentement quelques remarques préliminaires pour lui faciliter la solution des problêmes qui y sont rélatifs.

DEFINITIONS.

169. *Si quelque quantité est mesurée ou divisée par une autre sans reste, la premiére s'appelle un multiple de la derniére*; ainsi 12 est un multiple de 4, & 6 un multiple de 6; car en ce sens chaque quantité est un multiple d'elle-même; *mais si une quantité peut être mesurée ou divisée sans reste par deux ou plus de deux autres, on l'appelle alors un multiple commun de ces autres quantités*; ainsi 60 est un multiple commun de 2, 3, 4, 5, 6.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, que si deux quantités inégales a *&* b *sont l'une & l'autre multiples d'une troisiéme, leur somme* $a+b$, *& leur différence* $a-b$ *ou* $b-a$, *seront aussi multiples de la même; & si* a *&* b *sont des multiples communs d'un certain nombre de quantités, leur somme & leur différence seront aussi les multiples communs des mêmes*; car les quantités, qui mesureront tant a que b mesureront pareillement leur somme & leur différence, (Voyez Art. 20. ax. 2.) c'est pourquoi, par la raison des contraires, une quantité quelconque ou plus d'une quantité, dont a & b sont multiples ou multiples communs, aura pour multiple simplement ou pour multiple commun tant la somme que la différence des quantités a & b.

N. B. Les lemmes suivans contiennent quelques propriétés curieuses, premiérement des nombres entiers, & puis des fractions: & nous croyons d'autant plus obliger le Lecteur en les lui communiquant, qu'elles sont

non seulement belles en elles-mêmes, mais aussi d'usage pour la solution de quelques-uns des problêmes suivans.

LEMME I.
THEOREME.

170. *Soient* a & b. *deux quantités quelconques dont le plus petit multiple commun est* c: *je dis que ce plus petit multiple commun* c *mesurera tout autre multiple commun* d *des mêmes quantités.*

Si on le nie, on ne sauroit pourtant disconvenir qu'après que *c* a mesuré *d* autant de fois qu'il est possible, il ne doive rester une quantité comme *e* plus petite que *c*; cela étant, *c* mesurera *d*—*e*. Puis donc que *a* & *b* mesurent l'un & l'autre *c*, & que *c* mesure *d*—*e*; *a* & *b* mesureront l'un & l'autre *d*—*e*; ainsi *d*—*e* est un multiple commun de *a* & *b*; mais *d* est un multiple commun des mêmes par la supposition; donc tant *d* que *d*—*e* sont des multiples communs de *a* & de *b*; par conséquent leur différence *e* est un multiple commun des mêmes par l'Art. 169; mais *e* est plus petit que *c* par la supposition; donc si *c* ne mesure pas *d* sans reste, il sera possible que deux quantités *a* & *b* ayent un multiple commun moindre que leur plus petit multiple commun; ce qui impossible. Donc *c* mesure *d* sans reste. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Si l'on applique à trois ou à plus de trois quantités la démonstration que nous venons de donner, elle prouvera également, que leur plus petit multiple commun mesurera tout autre multiple commun des mêmes quantités.

SCHOLIE.

Cette façon d'établir la vérité d'une proposition, en faisant voir que la proposition contraire mène à l'absurde, ou à une impossibilité, ou bien à quelque chose de contradictoire à une vérité déja démontrée, a été employée avec beaucoup de subtilité par les Anciens; toutes les fois qu'une preuve directe n'étoit pas si facile à trouver; & c'est à cause de cela que ces démonstrations sont quelquefois moins embarrassées que celles du genre direct, où moins de subtilité est requise: & surement elles sont aussi bonnes qu'aucune autre quelconque, puisqu'elles sont fondées sur les mêmes axiômes; & s'il leur manque de n'être pas tout-à-fait aussi convaincantes, cela vient de ce que le jeune Mathématicien ne s'est pas encore assez familiarisé avec les différentes maniéres de penser & de raisonner sur la grandeur en général: ainsi toutes les fois que je pourrai

d'une propofition douteufe, par un raifonnement jufte déduire une autre propofition manifeftement fauffe, j'aurai une marque certaine que la premiére propofition eft fauffe auffi: car la vérité ne peut mener qu'à quelque chofe de vrai.

LEMME 2.

PROBLEME.

171. *Deux nombres inégaux* a *&* b *étant donnés, on demande leur plus petit multiple commun.*

SOLUTION.

Comme ab, produit de a & de b multipliés l'un par l'autre, eft un multiple commun des deux nombres, ce produit peut être divifé fans refte par leur plus petit multiple commun, en vertu de l'Art. 170: fuppofons le donc divifé ainfi, & que le quotient foit c; donc par la raifon des contraires, fi le produit ab eft divifé par c, le quotient $\frac{ab}{c}$ fera le plus petit multiple commun de a & de b; d'où j'infére, que $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$ feront des nombres entiers; car fi cela n'étoit pas, comment $\frac{ab}{c}$ pourroit-il être un multiple commun de a & de b, bien moins encore leur plus petit multiple commun? Mais fi $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$ font des nombres entiers, il faut que c foit une mefure commune de a & de b. J'ajoûte de plus, que c eft leur plus grande mefure commune; car fi un plus grand nombre que c, par exemple d, les mefuroit l'un & l'autre; puisque $\frac{a}{d}$ & $\frac{b}{d}$ feroient des nombres entiers, $\frac{ab}{d}$ feroit un multiple commun de a & de b plus petit que $\frac{ab}{c}$, à caufe que d eft plus grand que c, & par cela même a & b auroient un multiple commun moindre que le plus petit de tous, ce qui eft abfurde: donc, *Si* a *&* b, *qui font les deux nombres propofés, font multipliés l'un par l'autre, & que leur produit foit divifé par leur plus grande mefure commune, le quotient fera leur plus petit multiple commun.* C. Q. F. D.

Par ex. fi les nombres propofés étoient 12 & 15, dont la plus grande mefure commune eft 3; le produit de leur multiplication fera 180, & ce nombre divifé par 3 donnera 60, pour leur plus petit multiple commun.

COROLLAIRE I.

Si les nombres donnés font premiers l'un à l'égard de l'autre, c'eft-à-dire, n'ont d'autre mefure commune que l'unité, le produit de leur multiplication fera leur plus petit multiple commun: car en ce cas $\frac{ab}{c} = \frac{ab}{1} = ab$.

COROLLAIRE 2.

Si la fraction $\frac{a}{b}$ *est réduite à ses derniers termes* $\frac{d}{e}$; *je dis que* ae *ou* bd (*car ces grandeurs sont égales*) *sera le plus petit multiple commun de* a *&* *de* b: car en ce cas, si c est la plus grande mesure commune de a & de b, nous aurons $d = \frac{a}{c}$, & $e = \frac{b}{c}$, & par conséquent ae ou bd sera $\frac{ab}{c}$.

LEMME 3.

PROBLEME.

172. *On demande le plus petit multiple commun de trois ou de plus de trois nombres donnés.*

Que les nombres donnés soient a, b, c & d, & le problême pourra se résoudre de la maniére suivante: *Premiérement, trouvez par l'Article précédent le plus petit multiple commun de* a *&* *de* b, *& appellez-le* e; *puis trouvez le plus petit multiple commun de* e *& de* c, *& appellez-le* f; *enfin trouvez le plus petit multiple commun de* f *& de* d, *& appellez-le* g: *je dis que ce dernier nombre* g *sera le plus petit multiple commun des nombres* a, b, c *&* d. Car premiérement, il faut que g soit un multiple commun de ces nombres, ce que je démontre ainsi: a & b doivent mesurer e leur plus petit multiple commun; & e mesurera f, le plus petit multiple commun de e & de c; & f mesurera g, le plus petit multiple commun de f & de d; donc a & b mesureront g: de plus, c mesurera f, le plus petit multiple commun de e & de c; & f mesurera g, comme il a été dit; donc c mesurera g; mais d mesure g par l'hypothése; donc tous les nombres donnés a, b, c & d mesurent g, & ce nombre est leur multiple commun. Je dis en second lieu que g est leur plus petit multiple commun: car s'il est possible que h soit un pareil multiple, & plus petit que l'autre, c'est-à-dire, que tous les nombres a, b, c & d mesurent un nombre h plus petit que g: puisque h est un multiple commun de a & de b par l'hypothése, & que e est leur plus petit multiple commun, e mesurera h par l'Art. 170; mais c mesure h par l'hypothése; donc puisque e & c mesurent h, leur plus petit multiple commun f doit aussi mesurer h; mais d mesure h par l'hypothése; donc puisque tant f que d mesurent h, leur plus petit multiple commun g doit aussi mesurer h, c'est-à-dire, une quantité plus grande en mesurera une plus petite, ce qui est absurde; donc g est le plus petit multiple commun des nombres donnés. *C. Q. F. D.*

Pour éclaircir cette solution, nous ajoûterons l'exemple suivant. On demande le plus petit multiple commun des nombres 8, 10, 12, & 14; or suivant le dernier Article le plus petit multiple commun de 8 & de 10 est 40; & le plus petit multiple commun de 40 & de 12 est 120; &

le plus petit multiple commun de 120 est de 14 & 840; donc 840 est le plus petit multiple commun des nombres 8, 10, 12 & 14.

LEMME 4.

PROBLEME.

173. *Les deux quantités inégales* a *&* b, *dont* c *&* d *sont respectivement les multiples, étant données, on demande de trouver autant de multiples qu'on voudra des mêmes quantités avec la même différence, c'est-à-dire, que le multiple de* a *surpasse toujours celui de* b *de la quantité* $\overline{c-d}$, *en cas que* c *soit plus grand que* d; *ou bien que le multiple de* b *surpasse toujours celui de* a *de la quantité* $\overline{d-c}$, *en cas que* d *soit plus grand que* c.

SOLUTION.

Que $c+e$ & $d+e$ représentent deux pareils multiples, c'est-à-dire, deux multiples, dont la différence soit $c-d$ ou $d-c$; cela étant, puisque tant c que $c+e$ sont multiples de a, e sera aussi multiple de a, par l'Art. 169; de-même puisque tant d, que $d+e$, sont multiples de b, e sera un multiple de b; donc *si* e *est quelque multiple commun de* a *& de* b, c+e *&* d+e *seront multiples des mêmes grandeurs, & tels qu'on les demande, & pas autrement. Soit présentement* e *le plus petit multiple commun de* a *& de* b; *en ce cas il est manifeste que* c+e *&* d+e *seront les premiers dans leur classe plus grands que* c *&* d, *& que* c+2e, *&* d+2e *seront ensuite immédiatement au-dessus de* c+e *& de* d+e, *& ainsi à l'infini: d'un autre côté* c−e *&* d−e *seront les premiers dans leur classe plus petits que* c *&* d, *&* c−2e *&* d−2e *seront ensuite immédiatement au-dessus de* c−e *& de* d−e, *& ainsi de suite aussi longtems que la soustraction pourra être continuée.*

Il suit de-là, que *si* e *est le plus petit multiple commun de* a *& de* b, *& que si* c *ou* d, *ou l'un & l'autre, sont moindres que* e, *ces multiples* c *&* d *seront les plus petits de leur classe*: par exemple, soit $a=4$, & $b=6$; en ce cas 8 & 18 seront deux multiples de a & de b, dont la différence est 10; & ils seront les plus petits dans leur classe, à cause que le plus petit multiple commun de a & de b est 12, & que le nombre 8 est moindre que 12: que si l'on demande d'autres multiples qui ayent la même différence, il sera facile de les trouver par une addition continuelle du plus petit multiple commun 12; comme 20 & 30, dont on fait par ce moyen 32 & 42, 44 & 54, &c. à l'infini.

LEMME 5.

THEOREME.

174. *Soient* a *&* b *deux quantités dont la plus grande mesure commune est* c: *je dis que si deux multiples inégaux de* a *& de* b *sont pris & comparés ensemble,*

ble, leur différence ne sauroit jamais être plus petite que la plus grande mesure commune c.

Car puisque, par la supposition, c mesure tant a que b, il faut qu'il mesure non seulement tous leurs multiples, mais aussi les différences de ces multiples; & par conséquent il ne sauroit y avoir de différence plus petite que c. C. Q. F. D.

LEMME 6.

PROBLEME.

175. *Deux nombres, comme* a & b, *dont* a *est supposé le plus grand, étant donnés, on demande deux multiples inégaux de ces nombres, dont la différence soit la plus petite possible, c'est-à-dire, par le dernier article, dont la différence soit la plus grande mesure commune de* a & *de* b.

SOLUTION.

Soit le plus grand nombre 270 & le plus petit 112, dont la plus grande mesure commune trouvée par l'Art. 21, est 2: il s'agit de trouver un multiple de 270 & un autre de 112, dont la différence soit 2, & cela, de quel des deux multiples qu'on veuille faire le plus grand. Ici $a=270$, & $b=112$. Je place ces deux équations l'une sous l'autre dans la forme suivante:

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{ére}}, & 1a-0b=+270, \\ 2^{\text{de}}, & 0a-1b=-112. \end{array}$$

Où $0a$ & $-0b$ sont mis simplement pour donner à ces équations la même forme qu'ont celles que j'en dérive de la maniére que voici: d'abord je divise 270 le terme absolu de la premiére équation par 112 terme absolu de la seconde, sans avoir égard au signe qui la précéde, & le plus proche quotient trop petit est 2; ainsi je multiplie la seconde équation par 2, & le produit est $0a-2b=-224$; j'ajoûte à cette nouvelle équation la premiére, $1a-0b=+270$, & la somme est $a-2b=+46$, que je mets au-dessous des deux autres pour avoir une troisiéme équation, comme on peut le voir dans la table ci-jointe: ensuite, je divise 112 terme absolu de la seconde équation, sans avoir égard au signe qui le précéde, par 46 terme absolu de la troisiéme équation, & le plus proche quotient trop petit est 2; ainsi je multiplie la troisiéme équation par 2, & le produit est $2a-4b=92$; j'ajoûte à cette équation celle qui est immédiatement au-dessous, savoir $0a-1b=-112$, & la somme fait une quatriéme équation, savoir $2a-5b=-20$, que je mets à sa place dans

dans la table: puis je divise 46 terme absolu de la troisiéme équation par 20 terme absolu de la quatriéme, & je trouve encore que le plus proche quotient trop petit est 2; c'est pourquoi à 2 fois la quatriéme équation j'ajoûte la troisiéme, ce qui me donne pour cinquiéme équation $5a-12b=+6$: cette équation étant écrite où il faut, je divise 20 terme absolu de la quatriéme équation par 6 terme absolu de la cinquiéme, & le plus proche quotient trop petit est 3; j'ajoûte donc trois fois la cinquiéme équation à la quatriéme, & forme par-là une sixiéme équation, savoir, $17a-41b=-2$: enfin, je divise 6 terme absolu de la cinquiéme équation par 2 terme absolu de la sixiéme, & le quotient exact est 3, mais le plus proche trop petit est 2: si présentement à trois fois la sixiéme équation j'ajoûtois la cinquiéme, j'aurois $56a-135b=0$; mais parce que je n'ai pas besoin d'une équation dont le terme absolu est zéro, mais seulement d'une équation dont le terme absolu est le plus petit possible, au-lieu de me servir du vrai quotient 3 je prends 2 le plus proche quotient trop petit, comme j'avois toujours fait jusque-là, & ajoûtant ainsi la cinquiéme équation à deux fois la sixiéme, j'en forme une septiéme, savoir, $39a-94b=+2$.

Ayant ainsi achevé ma série d'équations, je vois manifestement que les deux derniéres équations résolvent le problême; car si le multiple de a doit être plus grand que celui de b, $39a$ & $94b$ seront les multiples requis, puisque $39a-94b=+2$; mais si le multiple de b devoit être plus grand que celui de a, alors $17a$ & $41b$ seroient les multiples cherchés, à cause que $17a-41b=-2$, & par conséquent $41b-17a=+2$: c'est de quoi l'on peut aisément s'assurer par le calcul; car si a est 270, & b 112, nous aurons $39a=10530$, $94b=10528$, $17a=4590$, $41b=4592$.

Eq.	1,	$1a-0b=+270$.
	2,	$0a-1b=-112$.
	3,	$a-2b=+46$.
	4,	$2a-5b=-20$.
	5,	$5a-12b=+6$.
	6,	$17a-41b=-2$.
	7,	$39a-94b=+2$.

Enfin, on ne sauroit douter que cette série de termes absolus dans les équations dont il s'agit, ne se termine toujours par la plus grande mesure commune de a & de b, si l'on considére avec attention la méthode qu'il faut suivre pour trouver la plus grande mesure commune: méthode que nous avons prescrite dans l'Art. 21, & qui est précisément la même que celle qui nous a servi à trouver les termes absolus; car pour trou-

trouver la plus grande mesure commune des nombres 270 & 112, 270 doivent être divisés par 112, 112 par 46, 46 par 20, 20 par 6, & 6 par 2, & la suite 270, 112, 46, 20; 6, 2, est terminée par la plus grande mesure commune: mais cette série est la même que celle des termes absolus trouvés ci-dessus, excepté que dans cette derniére la plus grande mesure commune est répétée, ce qui vient de ce que le vrai quotient n'a pas été pris, mais seulement le plus proche quotient trop petit; c'est pourquoi une des deux derniéres équations pourra toujours résoudre le problême. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

Puisque la fraction $\frac{a}{b}$ ou $\frac{270}{112}$, réduite à ses moindres termes, est $\frac{135}{56}$, il paroît clairement par l'Art. 171, que $56a = 135b$ est le dernier multiple commun de a & de b, & par conséquent $56a - 135b = 0$ est la plus simple équation qui puisse avoir 0 pour son terme absolu. Que cette équation soit ajoûtée continuellement à l'une des deux derniéres équations qui résolvent le problême, & l'on aura un nombre infini de solutions du même problême, c'est-à-dire, qu'on aura un nombre infini d'équations dont les termes absolus seront $+$ ou -2: par exemple, si à la derniére équation $39a - 94b = 2$ on ajoûte l'équation $56a - 135b = 0$, on aura $95a - 229b = 2$; & si la même équation est ajoûtée encore une fois, il viendra $151a - 364b = 2$; & ainsi de suite: d'un autre côté, si à la pénultiéme équation, savoir, $17a - 41b = -2$ on ajoûte l'équation $56a - 135b = 0$, on aura $73a - 176b = -2$; & si la même équation est encore une fois ajoûtée, il viendra $129a - 311b = -2$, & de même à l'infini.

COROLLAIRE 2.

Les termes absolus des équations marquées ci-dessus seront toujours affirmatifs & négatifs alternativement, & le terme absolu de la derniére équation se trouvera négatif ou affirmatif suivant que le nombre des équations est pair ou impair: ainsi dans la table précédente les termes absolus sont $+270$, -112, $+46$, -20, $+6$, -2, $+2$, & le dernier, qui occupe un lieu impair, est $+2$.

SCHOLIE.

Voici quel seroit le problême précédent exprimé Algébraïquement. *Deux nombres* a & b, *dont la plus grande mesure commune est* c, *étant donnés on demande deux autres nombres* x & y, *qui soient tels, qu'étant multipliés par les nombres* a & b *respectivement, la différence des produits* $ax - by$ *se trouve égale à* $+$ *ou* $-c$.

Nous

Nous n'avons ici qu'une seule équation pour trouver les valeurs de deux inconnues; & c'est à cause de cela même que le problême admet une infinité de solutions, savoir, par une addition continuelle de l'équation $56a - 135b = 0$, comme dans le Corollaire 1: mais quoique cette équation puisse continuellement être ajoûtée à quelqu'une des équations de la table précédente, & cela à l'infini, il ne suit point delà qu'on puisse la soustraire de quelqu'une d'elles; ce qui prouve manifestement que ces équations sont les plus simples de leur espéce, c'est-à-dire, les plus simples de toutes les autres qui ont les mêmes termes absolus. (Voyez Art. 173.) C'est ce que nous démontrerons d'une maniére plus générale dans l'Art. 177. En attendant, comme il importe de former des conclusions générales concernant la nature de ces équations, il sera bon dans toutes les équations, excepté les deux premiéres, de désigner les coëfficiens de a & de b au moins, par des caractéres indéterminés: par exemple, dans la troisiéme équation nous avons $1a - 2b = +46$; faites $p = 1$ & $P = 2$, & vous aurez $pa - Pb = +46$: pareillement dans la quatriéme équation, si q est fait égal à 2 & Q égal à 5, vous aurez $qa - Qb = -20$; & ainsi de suite. Voyez les équations exprimées de cette façon:

Eq. 1, $1a - 6b = +270$.
2, $0a - 1b = -112$.
3, $pa - Pb = +46$.
4, $qa - Qb = -20$.
5, $ra - Rb = +6$.
6, $sa - Sb = -2$.
7, $ta - Tb = +2$.

LEMME 7.

THEOREME.

176. *Si dans quelqu'une des équations de l'Article précédent, les coëfficiens de* a *&* de b *sont multipliés en croix par les coëfficiens de* a *& de* b *dans l'équation la plus proche, soit au-dessus ou au-dessous, le coëfficient de* b *étant considéré comme affirmatif, je dis que la différence des deux produits, qui naîtront de cette multiplication, sera toujours égale à l'unité.*

Comme par exemple, qu'on prenne les deux derniéres équations, & que t coëfficient de a dans la derniére équation soit multiplié par S coëfficient de b dans la pénultiéme; pareillement que T coëfficient de b dans la derniére équation soit multiplié par s coëfficient de a dans la pénultiéme: je dis, que la différence entre les produits tS & Ts sera égale à

 l'unité;

l'unité; & que la même chose aura lieu dans toute l'étendue de la série, pourvu que les équations, dont on fera usage, soient voisines.

Pour démontrer ceci, soit le terme absolu de l'avant-pénultiéme équation divisé par le terme absolu de la pénultiéme, & que le plus proche quotient trop petit soit n; il est clair en ce cas par la nature de ces équations, que $nsa + ra$ sera égal à ta, & que $-nSb - Rb$ sera égal à $-Tb$; donc $ns + r = t$, & $nS + R = T$. Substituez maintenant au lieu de t & T leurs valeurs ainsi trouvées, & vous aurez $tS = nSs + Sr$, & $Ts = nSs + sR$; donc la différence entre tS & Ts sera la même que la différence entre sR & Sr; & par la même raison, la différence entre sR & Sr est la même que la différence entre rQ & Rq; & cette derniére la même que la différence entre qP & Qp, &c. Donc si cette différence dans deux équations voisines quelconques est connue, elle le sera par-tout, comme étant par-tout la même; mais 1 coëfficient de a dans la premiére équation étant multiplié par 1 coëfficient affirmatif de b dans la seconde, donne pour produit 1; & de plus 0 coëfficient de b dans la premiére équation étant multiplié par 0 coëfficient de a dans la seconde, donne 0 pour produit, & la différence entre les produits 1 & 0 est 1; donc la différence des produits sera par-tout 1. C. Q. F. D.

LEMME 8.

THEORÉME.

177. *Supposant tout comme dans les deux derniers articles, si les coëfficiens de* a *&* de b *dans les différentes équations du scholie ajoûté à l'Art.* 175, *sont tournés en fractions, en faisant des coëfficiens de* b *les numérateurs, & de ceux de* a *les dénominateurs; je dis cela étant, que les fractions* $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{P}{p}$, $\frac{Q}{q}$, $\frac{R}{r}$, $\frac{S}{s}$, $\frac{T}{t}$ *seront toutes réduites à leurs moindres termes.*

Car si la fraction $\frac{T}{t}$ par exemple, peut être exprimée plus simplement encore, les nombres T & t doivent admettre quelque mesure commune plus grande que l'unité, soit cette mesure commune appellée m; puis donc que le nombre m mesure les nombres T & t, il doit mesurer aussi les produits Ts & tS, & par conséquent leur différence; mais la différence de ces deux produits est l'unité, par le dernier article; donc m nombre plus grand que l'unité doit mesurer l'unité, ce qui est absurde; par conséquent la fraction $\frac{T}{t}$ est réduite aux plus simples termes: & la même remarque est applicable à toutes les autres. C. Q. F. D.

Co-

COROLLAIRE.

Si le terme abſolu de la pénultiéme équation, qui eſt la plus grande meſure commune de a & de b, eſt diviſé par le terme abſolu de la derniére, qui eſt pareillement la même meſure commune, le quotient ſera 1: donc ſi la derniére équation eſt multipliée par 1, & qu'au produit on ajoûte la pénultiéme équation, ou ce qui revient au même, ſi l'on ajoûte enſemble les deux derniéres équations, il en naîtra une équation de cette forme $va - Vb = 0$, les deux termes abſolus ſe détruiſant l'un l'autre; donc $\frac{V}{v} = \frac{a}{b}$; mais la fraction $\frac{V}{v}$ eſt réduite aux plus ſimples termes par le préſent théorême, comme ayant été produite précisément de-même que toutes les autres; par conſéquent $av - bV$ eſt le plus petit multiple commun de a & de b, & l'équation $av - bV = 0$ eſt la plus ſimple de celles qui peuvent avoir 0 pour terme abſolu: mais av & bV ſont de plus grands multiples de a & de b qu'aucun autre de ceux que donne l'Art. 175, comme il paroît manifeſtement par la génération de ces équations; donc l'équation $av - bV = 0$ ne ſauroit être retranchée de quelqu'une de ces équations, au-moins ſans détruire le coëfficient a; donc ces équations ſont les plus ſimples de leur eſpéce.

LEMME 9.

THEOREME.

178. *Suppoſant tout comme dans le dernier Article, je dis que les fractions* $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}, \frac{S}{s}, \frac{T}{t}$ *ſont de nature à ſe trouver alternativement plus grandes & plus petites que la fraction* $\frac{a}{b}$, *vers laquelle néanmoins elles ſont conſtamment convergentes.*

Ainſi la fraction $\frac{0}{1}$ eſt infiniment plus petite que la fraction $\frac{a}{b}$, & la fraction $\frac{1}{0}$ eſt infiniment plus grande; car plus le dénominateur d'une fraction, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt petit, plus la fraction même eſt grande; par conſéquent ſi le dénominateur eſt zéro ou infiniment petit, la valeur d'une pareille fraction doit être infiniment grande: de même encore la fraction $\frac{P}{p}$ eſt plus petite que $\frac{a}{b}$, & la fraction $\frac{Q}{q}$ plus grande, & ainſi alternativement. Je dis de plus, que la fraction

tion $\frac{Q}{q}$ approche davantage de $\frac{a}{b}$ que ne fait la fraction $\frac{P}{p}$, & la fraction $\frac{R}{r}$ plus que $\frac{Q}{q}$, & ainsi de suite.

Pour le démontrer, soit l'équation $ca - Cb = \pm d$ une expression générale de toutes les équations de l'Art. 175 : divisant les deux membres par bc, nous aurons $\frac{a}{b} - \frac{C}{c} = \pm \frac{d}{bc}$; d'où j'infére, 1°. que la fraction $\frac{a}{b}$ sera plus grande ou plus petite que la fraction $\frac{C}{c}$, suivant que le terme absolu d est affirmatif ou négatif: 2°. que plus le terme absolu d est petit, où le dénominateur c grand, plus la fraction $\frac{C}{c}$ approchera de la fraction $\frac{a}{b}$: mais dans toute l'étendue de la série des équations de l'Art. 175, les termes absolus sont alternativement affirmatifs & négatifs; donc la série des fractions déduites de ces équations sera de telle nature, que les fractions se trouveront alternativement plus petites & plus grandes que la fraction $\frac{a}{b}$: il est manifeste aussi par la nature des équations dont il s'agit, que la série des termes représentés par d ira constamment en diminuant, au-lieu que celle des termes représentés par c ira en croissant; & par ces deux raisons, les fractions représentées par $\frac{C}{c}$ doivent être convergentes de part & d'autre vers la fraction $\frac{a}{b}$.

COROLLAIRE.

Donc si l'on prend deux fractions voisines, comme $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$, la fraction $\frac{a}{b}$ doit se trouver entre elles, mais de façon à être plus près de la fraction $\frac{T}{t}$ que de la fraction $\frac{S}{s}$, sans quoi la série ne feroit pas convergente.

LEMME 10.

THEOREME.

179. *Supposant tout comme dans les Articles précédens, je dis que les fractions* $\frac{P}{p}, \frac{Q}{q}, \frac{R}{r}, \frac{S}{s}, \frac{T}{t}$, *expriment la fraction* $\frac{a}{b}$ *plus exactement, que ne pourroit faire aucune autre fraction quelconque dont le dénominateur seroit plus petit; & particuliérement, que la fraction* $\frac{T}{t}$ *approche davantage de la fraction* $\frac{a}{b}$ *que ne*

peut

peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur est plus petit que t.

Si on le nie, soit $\frac{C}{c}$ une fraction dont le dénominateur c est plus petit que t; je dis donc que $\frac{C}{c}$ ne sauroit être égal à $\frac{T}{t}$; car la fraction $\frac{T}{t}$ est déjà réduite aux plus simples termes, par l'Art. 177; donc si la fraction $\frac{C}{c}$ étoit égale à la fraction $\frac{T}{t}$, le dénominateur c devroit être égal au dénominateur t, ou quelque multiple de ce dénominateur, au-lieu que c est plus petit que t par l'hypothése: or comme la fraction $\frac{a}{b}$ se trouve entre les deux fractions $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$, mais plus près de $\frac{T}{t}$ par le dernier Article, il s'ensuit que si la fraction $\frac{C}{c}$ approche plus de $\frac{a}{b}$ que ne fait la fraction $\frac{T}{t}$, elle doit aussi se trouver entre $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$; mais la différence entre $\frac{T}{t}$ & $\frac{S}{s}$ est $\frac{1}{ts}$, par l'Art. 176; & la différence entre $\frac{C}{c}$ & $\frac{S}{s}$ est $\frac{Cs-cS}{cs}$, ou $\frac{cS-Cs}{cs}$; & cette différence ne sauroit être plus petite que $\frac{1}{cs}$: puis donc que $\frac{1}{cs}$ est plus grand que $\frac{1}{ts}$ à cause que c est plus petit que t, il s'ensuit que la différence entre $\frac{S}{s}$ & $\frac{C}{c}$ est plus grande que la différence entre $\frac{S}{s}$ & $\frac{T}{t}$; donc la fraction $\frac{C}{c}$ ne sauroit se trouver entre les deux fractions $\frac{S}{s}$ & $\frac{T}{t}$, & par cela même ne sauroit approcher autant de la fraction $\frac{a}{b}$ que fait la fraction $\frac{T}{t}$. *C.Q.F.D.*

SCHOLIE I.

En calculant les équations de l'Art. 175, nous avons trouvé pour quotiens, 2, 2, 2, 3, 2, le dernier quotient 3 ayant été diminué d'une unité, afin de donner au problême une solution telle qu'il falloit pour répondre au but qu'on s'y proposoit; mais si le vrai quotient 3 avoit été pris, la derniére équation auroit été $56a-135b=0$, & la fraction dérivée de cette équation se seroit trouvée être $\frac{135}{56}$, qui n'est autre chose que la fraction $\frac{a}{b}$ réduite à ses plus simples termes; donc si le dernier quotient est pris tel qu'il faut, les fractions dérivées de ces équations, savoir, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{41}{17}$, $\frac{135}{56}$ seront non seulement convergentes des deux

côtés

côtés vers la fraction intermédiaire $\frac{a}{b}$, mais à la fin s'y termineront actuellement.

Pour ce qui est de la maniére de calculer ces fractions, il n'est pas nécessaire d'introduire les termes *a* & *b* dans la série, & moins encore de faire le calcul des équations pour en déduire les fractions; car comme les termes de ces fractions ne sont autre chose que les coëfficiens de *a* & de *b*, on peut les avoir plus aisément en s'y prenant de la maniére que nous allons dire. Soit proposée la fraction $\frac{270}{112}$, dont le numérateur & le dénominateur sont les termes *a* & *b*, comme dans l'Art. 175, & qu'on demande de trouver d'autres fractions de moindres dénominations qui, quoique pas égales à la fraction proposée, ne laissent pas d'en approcher autant que la nécessité présente l'exige, & plus que ne pourroit faire une autre fraction quelconque de plus petite dénomination que celle-ci: ici le plus grand nombre 270 divisé par le moindre 112 donne pour quotient 2, & il reste 46; 112 divisés par 46 donnent pour quotient 2, & il reste 20; 46 divisés par 20 donnent 2, & il reste 6; 20 divisés par 6 donnent 3, & il reste 2; & enfin 6 divisés par 2 donnent 3, & il reste 0; ainsi les quotiens nés de cette division continuelle sont 2, 2, 2, 3, 3. Ces quotiens étant ainsi trouvés, je prends deux fractions $\frac{0}{1}$ & $\frac{1}{0}$ pour commencer, & multipliant 1 & 0, termes de la derniére fraction, par le premier quotient 2, les produits sont 2 & 0, auxquels j'ajoûte 0 & 1, termes de la premiére fraction, & trouve par-là 2 & 1 pour termes de ma premiére fraction finie; ainsi ma premiére fraction finie est $\frac{2}{1}$; je multiplie ces termes 2 & 1 par mon second quotient 2, & les produits sont 4 & 2, auxquels ajoûtant 1 & 0, termes de la fraction immédiatement précédente, j'ai pour nouvelle fraction $\frac{5}{2}$; ces termes 5 & 2 doivent être multipliés par mon troisiéme quotient 2, & les produits seront 10 & 4, lesquels par l'addition de 2 & de 1, termes de la fraction immédiatement précédente, forment une fraction égale à $\frac{12}{5}$; je multiplie ces termes 12 & 5 par mon quatriéme quotient 3, & les produits sont 36 & 15, qui augmentés de 5 & de 2, termes de la fraction immédiatement précédente, donnent $\frac{41}{17}$ pour termes d'une quatriéme fraction; enfin je multiplie 41 & 17 par mon dernier quotient 3, & les produits sont 123 & 51, qui avec 12 & 5, termes de la fraction précédente, me donnent $\frac{135}{56}$ pour ma derniére fraction; donc les fractions ainsi trouvées sont $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{41}{17}$, $\frac{135}{56}$. Observons ici, que si j'avois

j'avois placé la fraction $\frac{1}{0}$ avant la fraction $\frac{0}{1}$, & que j'eusse ensuite dérivé les autres fractions de celles-ci comme auparavant, ces fractions auroient paru sous cette forme, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{17}{41}$, $\frac{56}{135}$, & auroient différé de celles que nous avons trouvées ci-dessus, en ce que les numérateurs des unes servent de dénominateurs aux autres, & réciproquement : ces derniéres fractions auroient aussi été convergentes, & se seroient à la fin confondues avec la fraction intermédiaire $\frac{b}{a}$, avec cette différence néanmoins, que dans le cas présent la premiére fraction $\frac{1}{2}$ auroit été plus grande que $\frac{b}{a}$, la fraction $\frac{2}{5}$ plus petite, & ainsi alternativement.

Pour faire appercevoir plus distinctement l'approximation de ces fractions, je les réduirai toutes à d'autres fractions dont le numérateur commun sera 270, de la maniére suivante : comme 2 le numérateur de la premiére fraction est à 1 le dénominateur, ainsi 270 le nouveau numérateur de la même fraction à 135 le nouveau dénominateur ; donc $\frac{2}{1}=\frac{270}{135}$: fraction qui ne différe pas davantage de $\frac{270}{112}$ qu'on ne devoit s'y attendre, eu égard à la simplicité de la fraction $\frac{2}{1}$: 2°, comme 5 le numérateur de la fraction suivante est à 2 le dénominateur, ainsi 270 à 108 ; donc $\frac{5}{2}=\frac{270}{108}$, fraction qui différe beaucoup moins de $\frac{270}{112}$ que n'en différoit la premiére fraction $\frac{2}{1}$: 3°, comme 12 le numérateur de la fraction suivante est à 5 le dénominateur, ainsi 270 à $112\frac{1}{2}$; donc $\frac{12}{5}=\frac{270}{112\frac{1}{2}}$, ce qui approche de bien près de $\frac{270}{112}$: 4°, comme 41 le numérateur de la fraction suivante est à 17 le dénominateur, ainsi 270 à $111\frac{39}{41}$ ou $112-\frac{1}{20}$ à peu près ; par conséquent $\frac{41}{17}=\frac{270}{112-\frac{1}{20}}$: enfin, comme 135 le numérateur de la derniére fraction est à 56 le dénominateur, ainsi 270 à 112 ; donc $\frac{135}{56}=\frac{270}{112}$.

Un autre exemple de cette sorte d'approximation pourra nous être fourni par la raison de la circonférence d'un cercle à son diamétre, laquelle, suivant les nombres de *van Ceulen*, est la même que celle de 314159265359, à 100000000000. Ici faisant $a=314159265359$, & $b=100000000000$, qu'il soit question de trouver une fraction en termes plus simples, qui exprime à peu près la fraction $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire, qui en approche davantage qu'aucune autre qui ait un plus petit déno-

minateur. Voici comment il faudra s'y prendre: 1°, a divisé par b donne pour quotient 3, & il reste $c=141592653 59$: 2°, b divisé par c donne pour quotient 7, & il reste $d=885142487$: 3°, c divisé par d donne pour quotient 15, & il reste $e=882128054$: 4°, d divisé par e donne pour quotient 1, & il reste $f=3014433$: 5°, e divisé par f donne pour quotient 292, & il reste $g=1913618$. Ce dernier quotient 292 étant si grand, j'en infére que les quatre premiers quotiens 3, 7, 15 & 1 donneront la derniére fraction assez exactement, les termes devant en être multipliés par 292 pour avoir une autre fraction plus exacte. Ainsi faisant usage des quatre premiers quotiens 3, 7, 15 & 1, je continue mon opération, comme dans l'exemple précédent, & trouve par-là quatre fractions $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ & $\frac{355}{113}$: cette derniére sera suffisante pour la pratique; car puisque la circonférence d'un cercle est au diamétre comme a est à b, & que la fraction $\frac{a}{b}$ approche de fort près de $\frac{355}{113}$, il s'ensuit que la circonférence est au diamétre comme 355 à 113 à peu près, ou comme $\frac{355}{113}$ à 1, ou (réduisant la fraction en parties décimales) comme 3.1415929 à 1, ou enfin comme 31415929 à 10000000: l'antécédent de cette derniére proportion est exactement vrai jusqu'à 7 & presque jusqu'à 8 caractéres; car les termes auroient dû être comme 31415927 à 10000000.

Ceux qui voudroient se souvenir, sans le moindre effort de mémoire, de la proportion que nous avons assignée ici entre le diamétre & la circonférence du cercle, peuvent faire usage de la méthode suivante: il faut écrire les trois premiers nombres impairs 1, 3 & 5, puis les écrire encore une fois, de façon que chaque nombre soit suivi de celui qui lui est égal, ce qui donne 113355: ce nombre étant divisé en deux parties, chacune de trois caractéres, les trois premiers, savoir 113, désigneront le diamétre, & les trois derniers la circonférence.

SCHOLIE 2.

Les fractions dont il a été parlé dans le dernier scholie peuvent s'appeller fractions principales, étant toutes convergentes vers la fraction intermédiaire $\frac{a}{b}$, avec laquelle elles se confondent à la fin; mais si l'on vouloit que la suite fût complette, il faudroit, toutes les fois que le quotient se trouveroit plus grand que l'unité, insérer des fractions secondaires entre les fractions principales, en changeant la multiplication prescrite dans le dernier article en addition continuelle: pour cet effet, il faut faire deux

deux rangs de fractions, le rang supérieur pour les fractions plus grandes que $\frac{a}{b}$, & le rang inférieur pour celles qui sont plus petites que $\frac{a}{b}$, desorte que $\frac{1}{0}$ soit la premiére fraction du rang supérieur, & $\frac{0}{1}$ la premiére du rang inférieur. Cela étant, si vous faites usage de l'exemple du scholie précédent, où les quotiens étoient 2, 2, 2, 3, 3, à cause que les équations de l'Art. 175. étoient particuliérement adaptées à ce cas, ajoûtez les termes de la fraction $\frac{1}{0}$ deux fois aux termes de la fractions $\frac{0}{1}$, parce que le premier quotient a été 2, & vous aurez deux fractions, qui naîtront de cette addition continuelle, savoir, $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{1}$, qu'il faudra placer dans le rang inférieur : ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{2}{1}$ deux fois aux termes de la fraction, $\frac{1}{0}$, parce que le second quotient a été deux, & vous aurez deux fractions $\frac{3}{1}$ & $\frac{5}{2}$, qu'il faudra placer dans le rang supérieur ; ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{5}{2}$ deux fois aux termes de la derniére fraction $\frac{2}{1}$ dans le rang inférieur, parce que le troisiéme quotient a été 2, & vous aurez les fractions $\frac{7}{3}$ & $\frac{12}{5}$ pour être placées dans le rang inférieur; ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{12}{5}$ trois fois aux termes de la derniére fraction $\frac{5}{2}$ dans le rang supérieur, parce que le quatriéme quotient étoit 3, & vous aurez $\frac{17}{7}$ $\frac{29}{12}$ & $\frac{41}{17}$ à mettre dans le rang supérieur : ajoûtez les termes de cette derniére fraction $\frac{41}{17}$ trois fois à la derniére fraction $\frac{12}{5}$ dans le rang inférieur, parce que le dernier quotient étoit 3, & vous aurez $\frac{53}{22}$, $\frac{94}{39}$ & $\frac{135}{56}$ à mettre dans le rang inférieur : & vous aurez ainsi achevé la série entiére, ou plutôt les deux séries de fractions, la série supérieure étant composée des fractions qui sont plus grandes que $\frac{a}{b}$, & la série inférieure de celles qui sont moindres que cette fraction, comme on peut le voir par la table suivante.

Fractions plus grandes qu'il ne faut, $\frac{1}{0}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{17}{7}$ $\frac{29}{12}$ $\frac{41}{17}$.

Fractions plus petites qu'il ne faut, $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{7}{3}$ $\frac{12}{5}$ $\frac{53}{22}$ $\frac{94}{39}$ $\frac{135}{56}$.

La derniére fraction dans le rang inférieur, savoir $\frac{135}{56}$, est égale à $\frac{a}{b}$, & par conséquent, à proprement parler, n'appartient à aucun des deux rangs: chaque fraction dans le rang supérieur approche davantage de $\frac{a}{b}$ que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples, & qui est plus grande que $\frac{a}{b}$; & chaque fraction dans le rang inférieur approche pareillement davantage de $\frac{a}{b}$ que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples, & qui est plus petite que $\frac{a}{b}$; mais il arrive quelquefois qu'une fraction d'un côté n'en approche pas si près qu'une autre de l'autre, quoique conçue en termes moins simples: c'est ainsi que la fraction $\frac{17}{7}$ dans le rang supérieur différe davantage de $\frac{270}{112}$ ou $\frac{a}{b}$ d'un côté, que la fraction $\frac{12}{5}$ ne fait de l'autre; car l'excès de $\frac{17}{7}$ par-dessus $\frac{270}{112}$ est $\frac{1}{56}$ ou $\frac{10}{560}$, au-lieu que l'excès de $\frac{270}{112}$ par-dessus $\frac{12}{5}$ est $\frac{6}{560}$; mais cela n'arrive jamais, quand la fraction qui a le plus grand dénominateur est une fraction principale.

Tout ce qui vient d'être dit dans ce scholie se comprendra plus aisément, si l'on traite les équations de l'Art. 175. précisément comme les fractions ont été traitées ici, c'est-à-dire, si l'on change la multiplication pratiquée dans cet article en addition continuelle; mais pour mieux distinguer ces équations, faites deux colomnes & placez toutes les équations dont les termes absolus sont négatifs dans la colomne qui est à gauche, & toutes celles dont les termes absolus sont affirmatifs à la droite, de-sorte que la premiére équation à la gauche soit $0a-1b=-112$, & la premiére à la droite $1a-0b=+270$: cela étant fait, voici comment il faut continuer l'opération: premiérement, ajoûtez l'équation $0a-1b=-112$ deux fois à l'équation $1a-0b=+270$, & vous aurez deux équations à mettre dans la colomne à droite, savoir, $1a-1b=+158$, & $1a-2b=+46$: secondement, ajoûtez cette derniére équation $1a-2b=+46$ deux fois à l'équation $0a-1b=-112$, & vous aurez deux équations à mettre dans la colomne à gauche, savoir, $1a-3b=-66$, & $2a-5b=-20$: en troisiéme lieu, ajoûtez cette derniére équation deux fois à l'équation $1a-2b=+46$, & vous aurez deux équations à mettre dans la colomne à droite, savoir $3a-7b=+26$, & $5a-12b=+6$: en quatriéme lieu, ajoûtez cette derniére équation trois fois à l'équa-

l'équation $2a-5b=-20$, & vous aurez trois équations à mettre à la gauche, savoir, $7a-17b=-14$, $12a-29b=-8$, & $17a-41b=-2$: enfin, ajoûtez cette derniére équation à trois fois l'équation $5a-12b=+6$, & vous aurez trois équations à mettre dans la colomne à droite, savoir $22a-53b=+4$, $39a-94b=+2$, & $56a-135b=0$. Vous aurez achevé alors vos séries d'équations, dont les deux séries de fractions rapportées ci-dessus ont été derivées.

	$1a-0b=+270.$
$0a-1b=-112.$	
	$1a-1b=+158.$
$1a-3b=-66.$	$1a-2b=+46.$
$2a-5b=-20.$	
	$3a-7b=+26.$
$7a-17b=-14.$	$5a-12b=+6.$
$12a-29b=-8.$	
$17a-41b=-2.$	$22a-53b=+4.$
	$39a-94b=+2.$
	$56a-135b=0.$

Je pourrois m'étendre davantage sur cette matiére, si je ne craignois pas d'avoir été trop prolixe, sur-tout pour ceux, qui étant moins accoutumés à opérer sur des nombres, ne sentent pas si bien l'utilité de cette doctrine.

Cette méthode d'approximation est dûe à la sagacité de feu Mr. *Cotes*, Professeur en Astronomie & en Philosophie Expérimentale dans cette Université: génie heureux, qui concevoit & traitoit les sujets les plus difficiles qui avoient rapport aux Mathématiques, avec une admirable simplicité; & dont les Ouvrages posthumes publiés depuis péu par son digne succeesseur le Dr. *Smith*, seront estimés aussi longtems qu'il y aura parmi les hommes quelque reste de jugement & de bon goût.

Mrs. *Wallis* & *Huygens* ont aussi écrit sur la matiére en question; mais je pense, que tout homme, qui voudra faire la comparaison, conviendra aisément avec moi, que la méthode de Mr. *Cotes* est bien plus simple & plus facile qu'aucune des leurs.

LEMME II.
THEOREME.

180. *Qu'il y ait deux fractions* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *telles, que si l'on divise* a *par* b, *&* c *par* d, *& que l'opération étant continuée suivant la méthode prescrite pour trouver la plus grande mesure commune, les quotiens nés de ces divisions soient trouvés les mêmes en grandeur, en ordre & en nombre: je dis, que les fractions* $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$ *seront égales l'une à l'autre.*

 Pour

Pour le démontrer, supposons que les quotiens dans les deux cas soient 1, 2 & 3, & qu'à l'aide de ces quotiens on fasse le calcul d'une série convergente de fractions principales, comme dans le premier scholie du dernier Article, savoir $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$ $\frac{10}{7}$; cela étant il paroît manifestement que cette série a un rapport égal aux deux fractions, sera également convergente vers l'une & l'autre, & se confondra à la fin avec toutes les deux; donc les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ doivent être égales, étant égales l'une & l'autre à la derniére fraction de la série, savoir $\frac{7}{10}$. *C. Q. F.* D.

COROLLAIRE.

Puisque les deux fractions mentionnées dans le dernier Article, savoir, $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ seront égales entre elles, soit que le nombre des divisions & des quotiens se trouve petit ou grand, il est clair que la nature de cette égalité ne dépend pas de la supposition d'une derniére division, quoique la démonstration même en dépende; & par conséquent cet Article sera vrai, quand même le nombre des quotiens seroit infini.

SCHOLIE.

Si a, b, c & d, au-lieu de représenter des nombres, représentent d'autres quantités quelconques, & que les quotiens de la division de a par b soient constamment les mêmes que les quotiens de la division de c par d, le sens du lemme précédent sera, que a aura la même raison à b que c à d; & cela, soit que les quantités a, b, c, d soient commensurables ou non: donc en cas, si nous posons comme une définition de la proportionalité, que *Quatre quantités s'appellent proportionelles, quand les quotiens nés d'une division continuelle des deux premiéres, sont à tous égards les mêmes que les quotiens nés d'une division continuelle des deux derniéres*; cette définition comprendra les incommensurables, & nous permettra d'appliquer le mot de proportion à de pareilles quantités: car toute la différence entre la proportion des quantités commensurables, & de celles qui sont incommensurables, se réduira à ceci, qu'au-lieu que dans le cas des quantités commensurables la suite des quotiens a une fin, dans le cas des quantités incommensurables cette suite continue à l'infini; mais les quotiens de la division des deux premiers termes seront à tous égards les mêmes que ceux de la division des deux derniers, ce qui prouve suffisamment qu'ils sont proportionels, & forme, suivant moi, la définition la plus dif-

distincte qu'on puisse donner de la proportionalité, quoique d'un usage plus borné que n'est la cinquiéme définition du cinquiéme Livre des Elémens d'Euclide, à cause que les autres propriétés des grandeurs proportionelles ne sauroient pas s'en déduire aussi aisément.

DES INCOMMENSURABLES.

Apologie de la liberté que nous prenons d'introduire ici la doctrine des Incommensurables.

181. Si quelqu'un me taxe d'avoir péché contre les règles de la bonne méthode en introduisant ici la doctrine des incommensurables, je le prierai de considérer que mon premier problême ne doit nullement être rejetté, soit qu'on fasse attention à l'élégance du problême même, ou à l'étroite liaison qu'il a avec quelques-uns des Articles précédens, qu'il aide à éclaircir; & comme ce problême est purement rélatif aux incommensurables, & suppose même leur existence, j'ai cru devoir leur assigner une place en cet endroit. Quoi qu'il en soit, la doctrine des incommensurables nous fournit un exemple curieux & frappant de la subtilité de l'esprit humain, & par conséquent, pourvu qu'elle soit proposée d'une maniére concise & claire, tout Lecteur qui préfére le plaisir d'apprendre à celui de blâmer, saura gré à celui qui se donnera cette peine en sa faveur, quand même l'endroit auroit pu être mieux choisi. En voilà assez pour ma justification.

Je n'insérerai ici qu'une très-petite partie de ce qui se trouve plus au long dans Euclide sur ce sujet; & je commencerai d'abord par démontrer quelques propriétés qui découlent naturellement de l'idée d'incommensurabilité, & l'une de l'autre, après quoi je m'attacherai à découvrir un sujet dans lequel ces propriétés résident, ou, ce qui revient au même, je prouverai qu'il y a actuellement dans la Nature des quantités incommensurables.

N. B. Si quelque Lecteur souhaite d'être convaincu de l'existence des incommensurables, sans se donner la peine de parcourir tout ce qui nous reste à dire sur ce sujet, il pourra commencer par lire le cent quatre-vingt-deuxiéme Article, & puis passer à la dixiéme proposition & à celles qui suivent, ces propositions n'ayant presque aucune liaison avec le reste.

DEFINITIONS ET AXIÔMES.

182. Déf. 1ére. *Une quantité est dite en mesurer une autre, quand étant retranchée de cette autre autant de fois qu'il est possible, il ne reste rien.*

2de,

2de. *Quand une quantité en mesure deux autres, elle est appellée leur commune mesure.*

3éme. *Et les grandeurs sont appellées commensurables ou incommensurables, suivant qu'elles admettent ou n'admettent pas une commune mesure.*

4éme. *On appelle des nombres entiers premiers entre eux, quand ils n'admettent aucune autre mesure commune que l'unité.*

5éme. *Un nombre quarré, dans le sens où nous allons prendre ce terme ici, est un nombre entier; qui a pour sa racine quarrée ou lui-même, ou quelque autre nombre entier, à l'exclusion de toute fraction, tant à l'égard du quarré, que de sa racine.*

6éme. *Toutes les fois qu'un nombre entier plus petit en mesure un plus grand, le plus petit s'appelle une partie aliquote du plus grand, & le plus grand un multiple du plus petit.*

SCHOLIE.

Les anciens Géométres, particuliérement ceux d'entre eux qui ont vécu avant *Archiméde*, me paroissent n'avoir presque fait aucun usage des fractions; mais la plupart des choses que nous faisons à l'aide des fractions, ils en venoient à bout par le moyen de la proportion en nombres entiers; de-sorte que par nombres, dans leurs écrits, il faut entendre des nombres entiers, & par parties aliquotes, des nombres entiers qui en mesurent d'autres plus grands: ainsi les parties aliquotes du nombre 6 étoient 1, 2 & 3; mais le nombre mixte $1\frac{1}{2}$, ou la fraction $\frac{3}{2}$, quoique compris dans 6 exactement quatre fois, n'entroit pas cependant dans la classe de ses parties aliquotes: & véritablement, si une pareille exclusion n'avoit point lieu, chaque nombre auroit autant de parties aliquotes qu'on voudroit, & la distinction entre des nombre premiers entre eux, & d'autres qui ne sont point premiers entre eux, se trouveroit entiérement abolie; notre idée de proportionalité en nombres deviendroit obscure & confuse; & cet excellent Traité des Nombres, qu'Euclide nous a donné dans le septiéme, huitiéme & neuviéme Livres de ses Elémens, ne seroit presque d'aucun usage. Ce n'est pas que je prétende ici nier la prodigieuse utilité des fractions dans toutes les opérations arithmétiques: car bien loin de la révoquer en doute, j'ai moi-même fréquemment employé les fractions dans des cas où d'autres font usage de la proportion, uniquement parce que je regardois les fractions comme plus traitables: mais tout ce que j'ai voulu dire se réduit proprement à ceci, que soit qu'on admette les fractions dans les opérations arithmétiques ou non, la doctrine des nombres entiers étant antérieure à celle des fractions, & distincte d'elle,

le, les Anciens ont eu raison de la traiter à part, sans aucun égard aux fractions.

COROLLAIRES DEDUITS DES DEFINITIONS.

1er. *Tous les nombres entiers sont commensurables;* car l'unité est la mesure commune d'eux tous.

2d. *Toutes les fractions sont commensurables:* car si les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont réduites à un même dénominateur, elles deviendront $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$; & $\frac{1}{bd}$ les mesurera l'une & l'autre.

3éme. *Tous les nombres entiers & les nombres mixtes comparés ensemble, tous les nombres mixtes comparés l'un avec l'autre, tous les nombres entiers & les fractions, tous les nombres mixtes & les fractions sont commensurables:* car tous les nombres mixtes peuvent être réduits en fractions, & tous les nombres entiers peuvent être considérés comme des fractions dont les dénominateurs sont autant d'unités.

Axiôme 1er. *Si une quantité en mesure une seconde, & celle-ci une troisiéme, la premiére quantité mesurera la troisiéme.*

2de. *Une quantité quelconque, qui en mesure deux autres, mesurera aussi leur somme & leur différence.*

3éme. *Deux quantités homogènes finies ne sauroient jamais différer tellement l'une de l'autre, que la plus petite ne puisse être multipliée jusqu'à ce qu'elle surpasse la plus grande.*

4éme. *Des fractions égales peuvent être converties en raisons égales exprimables par des nombres entiers, en faisant des numérateurs les antecédens & des dénominateurs les conséquens; & réciproquement, des raisons égales exprimées par des nombres entiers, peuvent être changées en fractions égales.*

PROPOSITION I.

183. *Toutes les quantités commensurables sont l'une à l'autre comme nombre à nombre; & réciproquement, toutes les quantités qui sont l'une à l'autre comme nombre à nombre, sont commensurables.*

Car premiérement, soient a & b deux quantités commensurables; je dis qu'en ce cas la raison de a à b, quelle qu'elle soit, peut s'exprimer en nombres entiers: car comme a & b sont des quantités commensurables, que c soit leur mesure commune: supposons, par exemple, que c mesure exactement a trois fois, & b quatre fois, cela étant $3c = a$, & $4c = b$, & a sera à b comme 3 à 4. *C. Q. F. D.*

Ensuite, que *a* & *b* soient deux quantités telles que la raison de *a* à *b* puisse être exprimée en nombres entiers; comme par exemple, que *a* soit à *b*, comme 3 à 4, & que *c* soit un tiers de *a*; cela étant, nous aurons $3c = a$ & $4c = b$, & la quantité *c* mesurera ainsi *a* & *b*; donc les quantités *a* & *b* seront commensurables. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION. 2.

184. *Des quantités incommensurables ne sont pas l'une à l'autre comme nombre à nombre; & réciproquement, des quantités, qui ne sont pas l'une à l'autre comme nombre à nombre, sont incommensurables.*

Premiérement, que *a* & *b* soient deux quantités incommensurables; je dis que la raison de *a* à *b* ne saura être exprimée en nombres entiers: car si cela étoit possible, ces quantités *a* & *b* seroient commensurables, par la derniére partie de la proposition précédente, ce qui est contre l'hypothése. Ensuite, que les quantités *a* & *b* soient telles, que la raison de *a* à *b* ne puisse pas être exprimée en nombres entiers, je dis qu'en ce cas les quantités *a* & *b* seront incommensurables; car si elles étoient commensurables, la chose seroit possible, par la premiére partie de la proposition précédente. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

Si la raison qu'ont entre elles des quantités incommensurables ne sauroit être exprimée en nombres entiers, elle ne sauroit non plus l'être par des fractions: car toutes les fractions sont commensurables, par le second corollaire des Définitions, & comme telles sont l'une à l'autre comme nombre à nombre, par la premiére proposition.

PROPOSITION 3.

185. *Si quatre quantités* a, b, c *&* d *sont proportionnelles, de-sorte que* a *soit à* b *comme* c *est à* d, *je dis, qu'en cas que les deux premiéres* a *&* b *soient commensurables, les deux derniéres* c *&* d *le seront aussi; mais qu'en cas que les deux premiéres* a *&* b *soient incommensurables, les deux derniéres* c *&* d *seront aussi incommensurables.*

Car premiérement, soit *a* & *b* commensurables; cela étant, *a* sera à *b* comme nombre à nombre, par la premiére proposition; mais comme *a* est à *b*, ainsi *c* est à *d*; donc *c* sera à *d* comme nombre à nombre; donc *c* & *d* seront commensurables par la premiére proposition. *C. Q. F. D.*

Ensuite, soient *a* & *b* incommensurables; cela étant, je dis que *c* &

& *d* feront auſſi incommenſurables : car ſi *c* & *d* étoient commenſurables, *a* & *b* feroient auſſi commenſurables par la premiére partie de cette propoſition, à cauſe que *c* eſt à *d* comme *a* eſt à *b*; mais *a* & *b* ne ſont point commenſurables par la ſuppoſition; donc *c* & *d* ſont incommenſurables auſſi. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

On peut inférer de cette propoſition, que *ſi l'on peut prouver que l'incommenſurabilité appartient à une ſorte de quantité continue quelconque, elle appartiendra également à toutes;* car dans cette démonſtration *a* & *b* peuvent être une ſorte de quantité, & *c* & *d* une autre ſorte. Les différentes ſortes de quantité connue, comme des lignes, des ſuperficies, des ſolides, le tems, la viteſſe, &c. peuvent par un effet de leur continuïté être toujours proportionnelles : mais ſi l'antécédent & le conſéquent d'une proportion ſont des quantités continues, & ſi l'autre antécédent & l'autre conſéquent ſont des quantités diſcrétes, c'eſt-à-dire des nombres, ces derniéres quantités pourront fort bien n'être pas toujours proportionnelles aux premiéres, comme il paroît par la ſeconde propoſition; quoique d'un autre côté les premiéres pourront toujours être proportionnelles aux autres.

SCHOLIE.

On peut voir par-là combien *Euclide* a eu raiſon de traiter la proportion des grandeurs continues, qui n'ont point de derniére partie finie, tout autrement qu'il n'a fait les nombres proportionnels, dont la plus petite partie finie eſt l'unité.

PROPOSITION 4.

186. *Si deux quantités ſont commenſurables à une troiſiéme, elles ſeront commenſurables entre elles.*

Soient deux quantités *a* & *b* commenſurables à une troiſiéme, que nous nommerons *c*; je dis, que les quantités *a* & *b* feront commenſurables l'une à l'autre: car premiérement, puiſque les grandeurs *a* & *c* ſont commenſurables, il faut qu'elles ſoient l'une à l'autre comme nombre à nombre, par la premiére propoſition; ſoit donc *a* à *c* comme le nombre *d* au nombre *e*. De plus comme les grandeurs *b* & *c* ſont ſuppoſées commenſurables, ſoit *c* à *b* comme le nombre *f* au nombre *g*; puis donc que *a* eſt à *c* comme *d* à *e*, ou comme *df* à *ef*; & de plus, puiſque *c* eſt à *b* comme *f* à *g*, ou comme *ef* à *eg*, il s'enſuit par égalité de raiſons, que

a eſt à *b* comme le nombre *df* au nombre *eg*, & par conſéquent que *a* & *b* ſont commenſurables par la premiére propoſition. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE 1.

Il paroît par-là que deux quantités incommenſurables ne ſauroient être commenſurables à une troiſiéme: car on vient de prouver qu'il n'y a que des quantités commenſurables qui ayent cette propriété.

COROLLAIRE 2.

S'il y a trois quantités homogénes a, b *&* c, *dont* a *eſt incommenſurable à* b, *&* b *commenſurable à* c; *je dis que* a *eſt incommenſurable à* c: car ſi cela n'étoit pas, nous aurions deux quantités incommenſurables entre elles, & cependant commenſurables à une troiſiéme, ce qui par le corollaire précédent, eſt impoſſible.

PROPOSITION 5.

187. *Comme des quantités incommenſurables ne ſauroient être égales l'une à l'autre, de-même aucun multiple, ni aucune partie ou parties de l'une ne peuvent être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre.*

Il eſt bien clair que deux quantités incommenſurables, par exemple, *a* & *b*, ne peuvent être égales; car en ce cas chacune d'elles ſeroit la meſure de toutes deux, & par cela même elles ne ſeroient plus incommenſurables: outre cela, aucun multiple, ni aucune partie ou parties de l'une ne ſauroient être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre; ce que je démontre ainſi. Que *c* ſoit quelque multiple, partie ou parties de *a*, & *d* de *b*; cela étant, ſi *c* eſt un multiple de *a*, il faut que *a* meſure *c*; d'un autre côté, ſi *c* eſt une partie de *a*, *c* meſurera *a*; & enfin, ſi *c* contient pluſieurs parties de *a*, comme $\frac{2}{3}$ de *a*, il eſt manifeſte que $\frac{1}{3}$ de *a* meſurera les deux quantités; de-ſorte que dans tous les cas *a* ſera commenſurable à *c*, & *b* commenſurable à *d* par la même raiſon; donc les quantités *c* & *d* ne ſauroient être commenſurables; car ſi elles l'étoient (*a* étant commenſurable à *c* & *c* à *d*) *a* & *d* ſeroient commenſurables par la derniére propoſition; mais ſi *a* eſt commenſurable à *d*, & *d* à *b*, *a* & *b* ſeront commenſurables, par la même propoſition; or *a* & *b* ne ſont point commenſurables; donc *c* & *d* ne le ſeront pas non plus. Ainſi il s'en faut tant que *c* & *d* ſoient des grandeurs égales, qu'elles ne ſont pas même commenſurables l'une à l'autre; donc de deux grandeurs incommenſurables aucun multiple, ni aucune partie ou parties ne peuvent être = à quelque multiple, partie ou parties de l'autre. *C. Q. F. D.*

La

La même choſe ſe démontre plus directement ainſi: a eſt incommenſurable à b, & b eſt commenſurable à d; donc d eſt incommenſurable à a, par le ſecond corollaire de la propoſition précédente: mais ſi d eſt incommenſurable à a, & que a ſoit commenſurable à c, d ſera incommenſurable à c, par le même corollaire; donc &c. *C. Q. F. D.*

LEMME.

188. *Soient deux quantités homogénes finies* a *&* q, *& qu'on retranche de la plus grande* a *plus de ſa moitié, & enſuite plus de la moitié du reſte, & du dernier reſte plus de la moitié, &c. je dis, que cette ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'il y ait un reſte plus petit que* q.

Car premiérement, puiſque par la ſuppoſition a & q ſont des quantités homogénes & finiès, la quantité q ne ſauroit être ſi petite, qu'à force de la multiplier elle ne ſurpaſſe a, par le troiſiéme axiôme: ſoit donc la grandeur $6q$ un multiple de q qui ſurpaſſe a; en ce cas $\frac{a}{6}$ ſera plus petit que q: qu'on retranche préſentement la moitié de a, & il reſtera $\frac{1}{2}a$; ôtez la moitié de ce reſte, & vous aurez $\frac{1}{4}a$, & puis, en répétant la même opération, $\frac{1}{8}a$; mais $\frac{1}{8}a$ eſt plus petit que $\frac{1}{6}a$, & $\frac{1}{6}a$ plus petit que q; donc $\frac{1}{8}a$ eſt plus petit que q; par conſéquent ſi l'on retranche la moitié de a, puis la moitié du reſte, & ainſi de ſuite, la ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'on parvienne à un reſte plus petit que q; donc à plus forte raiſon, ſi l'on retranche plus de la moitié de a, & plus de la moitié du reſte, la ſouſtraction pourra être continuée juſqu'à ce qu'on ait un reſte plus petit que q. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 6.

189. *Soient* a *&* b *deux quantités homogénes, à l'égard deſquelles doive être pratiquée la diviſion ſuivante: diviſez* a *par* b, *& que le reſte ſoit* c; *puis diviſez* b *par* c, *& que le reſte ſoit* d; *puis diviſez* c *par* d *& que le reſte ſoit* e, *&c. Je dis que la ſérie* a, b, c, d, e, *&c. pourra être continuée juſqu'à ce qu'on arrive à des termes plus petits qu'aucune quantité aſſignable, telle que* q.

a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.
41.	24.	17.	7.	3.	1.	0.	0.

Car dans la premiére diviſion, où a a été diviſé par b, c'eſt-à-dire, où b a été retranché de a auſſi ſouvent qu'il étoit poſſible, le reſte c doit être plus petit que b; car ſi cela n'étoit pas, b pourroit avoir été pris encore une fois ou davantage, contre l'hypothéſe: puis donc que la quantité retranchée étoit ſinon $2b, 3b, 4b$, &c. du-moins b, il s'enſuit que la

la quantité retranchée doit être plus grande que ce qui reste; donc dans la premiére division, où a a été divisé par b, on a retranché plus de la moitié de a, & il est resté c: pareillement dans la troisiéme division où c a été divisé par d, on a retranché plus de la moitié de c, & il est resté e: de-même dans la cinquiéme division, on a soustrait plus de la moitié de e, & le reste a été g, &c.; donc les termes a, c, e, g, &c. peuvent être continués jusqu'à ce qu'ils deviennent plus petits que q, par le lemme précédent: nous en disons autant des termes b, d, f, h, qu'on peut continuer jusqu'à ce qu'ils deviennent plus petits que q; d'où il s'ensuit que les termes a, b, c, d, e, f, g, h, peuvent être continués jusqu'à ce qu'ils deviennent plus petits que q. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 7.

190. *Supposant tout comme dans la derniére proposition; je dis, qu'une quantité quelconque, qui mesurera deux termes voisins de la série précédente, mesurera tous les autres termes sans exception.*

Soit q une mesure des deux quantités contigues d & e; cela étant je dis en premier lieu, que q mesurera tous les termes qui viennent après e; car après que d a été divisé par e, il est resté le terme suivant f; donc e mesure $d-f$: puis donc que q mesure e par l'hypothése, & que e mesure $d-f$, q doit mesurer $d-f$ par le premier axiôme; mais q mesure aussi d par l'hypothése; donc q mesure également les quantités d & $d-f$, dont la différence est f; par conséquent q mesure f par le second axiôme: on prouvera de-même que puisque q mesure d & e, il s'ensuit nécessairement qu'il doit mesurer f; ainsi comme q mesure de e & f, il mesurera nécessairement g, & ainsi de suite. Je dis en second lieu, que si q mesure d & e, il mesurera tous les termes qui précédent d: car quand c a été divisé par d il est resté e; donc d mesure $c-e$: puis donc que q mesure d par l'hypothése, & que d mesure $c-e$, q mesure $c-e$; mais q mesure aussi e par l'hypothése; donc q mesure également e & $c-e$, dont la somme est c; ainsi q mesure c: puis donc que de la supposition que q mesure tant e que d, il suit qu'il doit nécessairement mesurer c, on peut inférer de-même de ce que q mesure d & c, qu'il doit nécessairement mesurer b, & ainsi de suite. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 8.

191. *Supposant tout comme dans les deux propositions précédentes, je dis que si les premiers termes* a *&* b *sont commensurables, la série* a, b, c, d, e &c. *ne pourra point être continuée à l'infini; mais qu'elle sera terminée de sorte que le*

le dernier terme de la série se trouvera être la plus grande mesure commune de a *& de* b; *& réciproquement, si les termes* a, b, c, d, e &c. *ne sont point continués à l'infini, je dis que les premiers termes* a *&* b *sont commensurables.*

Premiérement, supposons a & b commensurables; cela étant, je dis que la série ne pourra point être continuée à l'infini: car si la grandeur q est une mesure commune de a & de b, cette grandeur mesurera tous les termes suivans par la derniére proposition; mais si les termes sont continués à l'infini, ils se trouveront enfin plus petits que q par la sixiéme proposition, & par conséquent q ne sauroit les mesurer tous; ainsi la série n'est pas continuée à l'infini: supposons donc que le dernier terme soit e, & je prouverai que e sera la plus grande mesure commune de a & de b: car comme e est le dernier terme de la série par l'hypothése, il mesurera sans reste le pénultiéme terme d; car s'il y avoit eu un reste comme f, la quantité f auroit été le terme après e, & par cela même e ne seroit pas le dernier terme de la série, contre l'hypothése: puis donc que e mesure tant d que lui même, il doit aussi mesurer a & b par la derniére proposition; & je dis de plus, qu'il sera la plus grande quantité qui puisse les mesurer tous deux: car si a & b admettoient une plus grande mesure commune que e, par exemple q, cette derniére grandeur mesureroit tous les termes suivans, & entr'autres e, par la derniére proposition, c'est-à-dire, qu'une plus grande quantité en mesureroit une plus petite, ce qui est absurde; donc si e est le dernier terme de la série, il sera la plus grande mesure commune dont a & b sont susceptibles. *C. Q. F. D.*

Enfin, il me reste à prouver, que si la série a, b, c, d, e *&c.* ne sauroit être continuée à l'infini, les premiéres quantités a & b sont commensurables; car puisque par l'hypothése la série ne va pas à l'infini, que le dernier terme en soit e: or il a été prouvé ci-dessus que e doit également mesurer d & e; donc il mesurera aussi a & b par la derniére proposition, & par cela même a & b seront commensurables.

COROLLAIRE I.

Si les nombres ou autres quantités homogénes a *&* b *sont commensurables, il sera facile de trouver leur plus grande mesure commune, savoir, en déterminant le dernier terme de la série* a, b, c, d, e: ainsi la plus grande mesure commune des nombres 42 & 30 est 6, à cause que 6 est le dernier terme de la série 42, 30, 12, 6.

COROLLAIRE 2.

Si les premiéres quantités a *&* b *sont incommensurables, la série* a, b, c, d, e

d, e &c. *pourra être continuée à l'infini*: car si cela ne se pouvoit pas, *a* & *b* seroient commensurables par la derniére partie de cette proposition.

COROLLAIRE 3.

Et réciproquement, si la série a, b, c, d, e &c. *peut se continuer à l'infini, les premières quantités* a *&* b *seront incommensurables*: car si elles étoient commensurables, la série n'iroit pas à l'infini par la premiére partie de cette proposition.

COROLLAIRE 4.

Toute quantité, comme q, *qui mesure deux autres quantités* a *&* b, *mesurera aussi leur plus grande mesure commune* e.

PROPOSITION 9.

PROBLEME.

192. *On demande, trois quantités commensurables* a, b *&* c *étant données, de trouver leur plus grande mesure commune.*

SOLUTION.

Trouvez d'abord la plus grande mesure commune de deux de ces quantités, par ex. a *&* b, *& nommez-la* d; *puis trouvez la plus grande mesure commune de* d *& de* c, *& appellez-la* e; *alors* e *sera la plus grande mesure commune des trois quantités proposées* a, b *&* c. Car premiérement, puisque *e* mesure *d*, & que *d* mesure tant *a* que *b*, *e* mesurera aussi *a* & *b*; mais *e* mesure *c* par l'hypothése, étant supposé la plus grande mesure commune de *d* & de *c*; donc *e* mesurera toutes les trois quantités *a*, *b* & *c*. Je dis, en second lieu, que *e* est la plus grande quantité qui puisse les mesurer toutes: car s'il est possible que *f*, quantité plus grande que *e*, mesure toutes les trois quantités *a*, *b* & *c*; cela étant, puisque *f* mesure tant *a* que *b*, il mesurera aussi leur plus grande mesure commune *d*, par le quatriéme corollaire de la derniére proposition; mais *f* mesure *c* par l'hypothése; donc *f* mesurera *e*, la plus grande mesure commune de *d* & de *c*, c'est-à-dire, une plus grande quantité en mesurera une plus petite, ce qui est absurde; donc *e* est la plus grande mesure commune de *a*, *b* & *c*. C. Q. F. D.

Pour éclaircir la règle, nous donnerons l'exemple suivant en nombres: on demande la plus grande mesure commune des nombres 42, 30 & 15. La plus grande mesure commune de 42 & de 30 est 6, par le premier corol-

corollaire de la huitiéme propoſition; & la plus grande meſure commune de 6 & de 15 eſt 3; & ſi les nombres 42, 30 & 15 ſont tous diviſés par 3, ils feront réduits à 14, 10 & 5, trois autres nombres qui forment entre eux la même proportion que leurs dividendes reſpectifs.

COROLLAIRE.

Toute quantité, comme f, *qui meſure trois quantités* a, b *&* c, *meſurera auſſi leur plus grande meſure commune* e.

N. B. Les propoſitions ſuivantes ſont deſtinées à prouver l'exiſtence des incommenſurables, & quelques-unes de leurs propriétés, qui méritent d'être connues.

PROPOSITION 10.

193. *Toutes les fractions égales, réduites à leurs derniers termes, deviennent une ſeule & même fraction.*

Avant que de m'engager dans la démonſtration de cette propoſition, je ferai une remarque qui ſera une eſpéce de lemme, ſavoir, que *Si deux nombres, comme* 7 *&* 11, *dont la plus grande meſure commune eſt l'unité, ſont multipliés par une troiſiéme quantité, comme* d, *de quelque ſorte qu'elle ſoit, cette quantité* d *ſera la plus grande meſure commune des quantités* 7d *&* 11d; *& réciproquement, ſi* d *eſt la plus grande meſure commune des quantités* 7d *&* 11d, *l'unité ſera la plus grande meſure commune des nombres* 7 *&* 11. Car ſi en trouvant la plus grande meſure commune de 7 & de 11, les diviſeurs ſont 7, 4, 3, 1, comme ils ſont réellement, auſſi en trouvant la plus grande meſure commune de $7d$ & $11d$, les diviſeurs feront $7d$, $4d$, $3d$, $1d$; c'eſt-à-dire, ſi 1 eſt le dernier diviſeur, & par conſéquent la plus grande meſure commune dans le premier cas, d ſera le dernier diviſeur, & par conſéquent la plus grande meſure commune dans le dernier cas, & réciproquement.

Ceci étant poſé, qu'il y ait préſentement deux fractions égales, qui étant réduites à leurs derniers termes, ſoient $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$: je vais démontrer que les nombres c & d ſont réellement les mêmes que les nombres a & b reſpectivement.

Car premiérement il eſt clair que les nombres a & b ne ſauroient avoir d'autre commune meſure que l'unité, non plus que les nombres c & d; car s'ils en avoient une autre, les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ ne feroient pas réduites à leurs derniers termes, mais pourroient être diviſées encore, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

2°. Les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ doivent être égales l'une à l'autre; car quelles que soient les méthodes dont on ait fait usage pour réduire ces fractions à leurs derniers termes, il est certain que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ doivent être égales aux fractions premiérement proposées, sans quoi elles ne représenteroient point ces fractions dans leurs derniers termes, mais d'autres fractions: puis donc que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont égales aux fractions premiérement proposées, & que ces fractions sont égales l'une à l'autre par la supposition, il s'ensuit que les fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont égales aussi.

3°. Que les fractions égales $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ soient présentement réduites au même dénominateur, je dis que les fractions qui en naîtront, savoir, $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ seront encore égales; à cause que cette réduction ne peut affecter en rien leur valeur, par le huitiéme Article de l'Introduction: puis donc que les fractions $\frac{ad}{bd}$ & $\frac{bc}{bd}$ sont égales, & ont le même dénominateur, il faut aussi qu'elles ayent le même numérateur, c'est-à-dire, que le nombre bc doit être le même que le nombre ad; donc les nombres bc & bd doivent être les mêmes que les nombres ad & bd respectivement; par conséquent la plus grande mesure commune de la premiére paire sera la même que la plus grande mesure commune de la derniére; mais la plus grande mesure commune des nombres bc & bd est b, par le lemme, à cause qu'il a été prouvé que la plus grande mesure commune des nombres c & d est l'unité; & par la même raison, la plus grande mesure commune des nombres ad & bd est d; ainsi les nombres b & d sont les mêmes: puis donc que les deux fractions $\frac{a}{b}$ & $\frac{c}{d}$ sont égales, & ont le même dénominateur, il faut qu'elles ayent pareillement le même numérateur, c'est-à-dire, qu'il faut que le nombre c soit le même que le nombre a; & par conséquent les nombres c & d doivent être réellement les mêmes que les nombres a & b respectivement. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

S'il y a deux fractions égales $\frac{a}{b}$ *&* $\frac{c}{d}$, *dont la première* $\frac{a}{b}$ *est réduite à ses derniers termes; je dis que* a *numérateur de la première fraction,* *mesu-*

mesurera c *numérateur de la seconde*, & *que* b, *dénominateur de la premiére*, *mesurera autant de fois* d *dénominateur de la seconde*.

Car soit e la plus grande mesure commune des nombres c & d; en ce cas l'unité sera la plus grande mesure commune des nombres $\frac{c}{e}$ & $\frac{d}{e}$ par le lemme démontré au commencement de la proposition; par conséquent $\frac{c}{e}$ & $\frac{d}{e}$ seront les derniers termes de la fraction $\frac{c}{d}$; mais la fraction $\frac{c}{d}$ est égale à la fraction $\frac{a}{b}$, qui est déja réduite à ses derniers termes par la supposition; & par cette proposition les derniers termes de toutes les fractions égales sont les mêmes; donc les nombres $\frac{c}{e}$ & $\frac{d}{e}$ sont les mêmes que les nombres a & b, & les nombres c & d les mêmes que les nombres ea & eb respectivement; mais a mesure ea, & b mesure eb autant de fois; donc a mesure c, & b mesure d autant de fois. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION II.

194. *S'il y a trois nombres* a, b & c, *dont* a *soit un nombre premier à l'égard de* b, & *que* b *soit un multiple de* c; *je dis, que* a *sera un nombre premier par rapport à* c.

Car si a & c ne sont pas des nombres premiers entre eux, il faut qu'ils ayent quelque mesure commune plus grande que l'unité par la quatriéme définition; que cette prétendue mesure soit d; puis donc que d mesure c, & que c mesure son multiple b, d mesurera aussi b; mais d mesure aussi a comme étant une mesure commune de a & de c; donc d mesure a & b; donc a & b ne sauroient être des nombres premiers entre eux, non plus que a & c; mais a & b sont des nombres premiers entre eux par la supposition; donc a & c doivent aussi être des nombres premiers l'un à l'égard de l'autre. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Quand c est égal à l'unité, cette proposition est manifeste par elle-même: car on voit d'abord que les nombres a & c n'ont d'autre mesure commune que l'unité: si l'on admettoit l'unité au rang des nombres, tout autre nombre seroit premier à son égard, & un de ses multiples. Pour éviter cette confusion, & établir une distinction entre des nombres premiers, & d'autres qui ne sont point tels, *Euclide* a exclu l'unité de sa définition de nombre, aimant mieux la considérer comme un dénominateur commun de tout nombre: ainsi le nombre 3 doit être interprété comme signifiant trois unités, &c.

PROPOSITION 12.

195. *Si deux nombres* a & b *sont tous deux premiers à l'égard d'un troisiéme nombre* c; *je dis, que leur produit* ab *sera aussi un nombre premier à l'égard du troisiéme nombre* c; *ou* (*ce qui revient au même*) *que le produit* ab & *le nombre* c *n'auront d'autre mesure commune que l'unité.*

Si on le nie, que le produit ab & le nombre c ayent quelque mesure commune plus grande que l'unité, par exemple d; puis donc que d mesure tant le produit ab que le nombre c, il mesurera aussi le nombre c seul, & par conséquent c sera quelque multiple de d; donc nous avons trois nombres a, c & d, dont a est un nombre premier rélativement à c, & c un multiple de d; donc par la derniére proposition a est un nombre premier rélativement à d, & la fraction $\frac{a}{d}$ est réduite à ses derniers ou moindres termes: de plus, puisque d mesure tant le produit ab que le nombre c, il mesurera ab seul, & par conséquent ab sera quelque multiple de d; donc la fraction $\frac{ab}{d}$ sera équivalente à quelque nombre entier; nommez ce nombre entier e; puisque $\frac{ab}{d} = e$, nous aurons $\frac{a}{d} = \frac{e}{b}$: nous avons donc ici deux fractions égales $\frac{a}{d}$ & $\frac{e}{b}$, dont la première $\frac{a}{d}$ est réduite à ses moindres termes; donc d dénominateur de la premiére fraction mesurera b dénominateur de la derniére, par le corollaire de la dixiéme proposition; mais d mesure c par l'hypothése; donc d, nombre plus grand que l'unité, mesure tant b que c; donc si le produit ab & le nombre c ne sont point premiers entre eux, les nombres b & c ne sauroient l'être non plus; mais les nombres b & c sont premiers l'un à l'égard de l'autre par l'hypothése; donc le produit ab & le nombre c sont aussi premiers entre eux. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

Si deux nombres a & b *sont premiers à l'égard de deux autres* c & d *de façon que les deux nombres* a & b *soient premiers à l'égard de chacun des nombres* c & d; *je dis, que* ab *produit des deux premiers sera un nombre premier par rapport à* cd *produit des deux derniers.* Car puisque tant a que que b sont des nombres premiers par rapport à c, le produit ab sera aussi premier par rapport à c par cette douziéme proposition; & par la même raison le produit ab sera aussi premier à l'égard du nombre d: puis donc que les nombres c & d sont premiers par rapport au nombre ab, leur produit cd doit aussi être premier à ab, & ab l'être à cd. *C. Q. F. D.*

Co-

COROLLAIRE 2.

Si dans le corollaire précédent les nombres *a* & *b* sont supposés égaux entre eux, comme aussi les nombres *c* & *d*; & que de plus *a* soit un nombre premier à *c*, en ce cas *a* & *b* seront des nombres premiers à chacun des nombres *c* & *d*, & par cela même le produit *ab* sera premier au produit *cd*: mais dans cette supposition le produit *ab* est le même que a^2, & le produit *cd* le même que c^2; donc a^2 sera un nombre premier à c^2; ce qui signifie proprement, que *Si deux nombres* a *&* c *sont premiers l'un à l'autre, leurs quarrés* aa *&* cc *le seront pareillement.*

COROLLAIRE 3.

Donc si deux nombres quelconques a *&* c *sont les plus petits qui expriment leur raison, leurs quarrés* aa *&* cc *seront les plus petits dans la leur:* car quand *a* ou *c* est égal à l'unité, la chose est claire (l'unité ne permettant pas qu'on continue la division;) & quand *a* & *c* sont des quantités plus grandes que l'unité, *aa* & *cc* seront les petits termes qui expriment leur raison, par le dernier corollaire.

PROPOSITION 13.

196. *S'il y a trois quantités homogénes* a, b *&* c *en proportion continue, & que le terme moyen soit commensurable aux extrêmes; je dis, que les plus petits nombres qui expriment la raison des extrêmes seront tous deux des quarrés.*

Puisque *a* & *b* sont commensurables par l'hypothése, soit leur plus grande commune mésure contenue dans *a* autant de fois qu'il y a d'unités en *d*, & dans *b* autant de fois qu'il y a d'unités en *e*; cela étant *d* & *e* seront les plus petits nombres qui expriment la raison de *a* à *b*, par la dixiéme proposition; & puisque *a* est à *b* comme *d* est à *e*, ou comme *dd* est à *de*, & que *b* est pareillement à *c* comme *d* à *e*, ou comme *de* à *ee*, il s'ensuit par égalité de raisons, que *a* est à *c* comme *dd* à *ee*; mais *d* & *e* sont les plus petits nombres qui expriment la raison de *a* à *b*, comme nous l'avons vu; donc *dd* & *ee* sont les plus petits nombres qui expriment la raison de *a* à *c*, par le troisiéme corollaire de la derniére proposition; donc les derniers nombres qui expriment la raison des extrêmes *a* & *c* sont l'un & l'autre des nombres quarrés. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION 14.

197. *S'il y a trois quantités homogénes* a, b *&* c *en proportion continue, dont les extrêmes* a *&* c *soient commensurables l'une à l'autre; & que les plus*

petits nombres qui expriment la raison de ces extrêmes, ne soient pas tous deux des quarrés, je dis que la quantité moyenne b *sera incommensurable aux deux extrêmes.*

Il est manifeste que la quantité moyenne ne sauroit être commensurable à un des extrêmes & incommensurable à l'autre; car si nous supposons, par exemple, que a & b sont incommensurables, & que cependant b & c sont commensurables, nous aurions deux quantités incommensurables a & b commensurables l'une & l'autre à une troisiéme quantité c, ce qui par le premier corollaire de la quatriéme proposition est impossible; donc la quantité moyenne doit être ou commensurable ou incommensurable aux deux extrêmes: pour commensurable elle ne sauroit l'être; car en ce cas les plus petits nombres qui expriment la raison des extrêmes devroient être des quarrés par la derniére proposition, ce qui est contre l'hypothése; donc le terme moyen doit être incommensurable aux deux extrêmes. *C. Q. F. D.*

Corollaire.

La ligne a *étant donnée, il sera facile d'en trouver autant d'autres qu'on voudra, qui lui seront incommensurables; car prenant deux nombres quelconques* d *&* e *qui soient les plus petits qui expriment leur raison, & pas tous deux des quarrés, faites* c *à* a *comme* d *à* e, *& une moyenne proportionelle entre* a *&* c, *trouvée par la treiziéme proposition du sixiéme Livre d'Euclide, sera incommensurable à l'une & à l'autre de ces quantités.*

Proposition 15.

198. *S'il y a quelque nombre entier, comme* n, *dont la racine quarrée ne sauroit être exprimée par quelque autre nombre entier; je dis, que cette racine ne peut non plus être exprimée par une fraction quelconque.*

Car supposant la chose possible, soit la racine quarrée de n exprimée par une fraction, laquelle étant réduite à ses derniers termes exprimables en nombres entiers sera $\frac{a}{b}$, c'est-à-dire, soit $\frac{a}{b}=\sqrt{n}$; cela étant nous aurons $\frac{aa}{bb}=\frac{n}{1}$; mais la fraction $\frac{aa}{bb}$ est réduite à ses moindres termes, par le troisiéme corollaire de la douziéme proposition, à cause que la fraction $\frac{a}{b}$ l'étoit; & la fraction $\frac{n}{1}$ est réduite à ses moindres termes, parce que l'unité n'admet point de division ultérieure; donc nous avons deux fractions égales $\frac{aa}{bb}$ & $\frac{n}{1}$, toutes deux réduites à leurs derniers termes; d'où il suit, que ces deux fractions doivent non seulement être

être égales en valeur, mais aussi dans leurs termes, c'est-à-dire, que aa doit être égal à n, & bb à 1; mais aa ne peut être égal à n, à cause que a est un nombre entier par la supposition, & que n est supposé ne point admettre de nombre entier pour sa racine; donc la racine quarrée de n ne sauroit être exprimée par quelque fraction que ce soit. *C. Q. F. D.*

Autrement ainsi. Premiérement n, $\sqrt{n}$ & 1, sont en proportion continue, à cause que le quarré du terme moyen est égal au produit des extrêmes; en second lieu, les extrêmes n & 1 sont les plus petits dans leur proportion, l'unité empêchant qu'on ne poursuive plus loin la réduction; en troisiéme lieu, un des extrêmes n n'est pas un nombre quarré par la supposition; donc le terme moyen qui est $\sqrt{n}$ est incommensurable à 1; donc il n'est point possible d'exprimer par quelque fraction ou par quelque nombre mixte quelconque $\sqrt{n}$, à cause que tous les nombres mixtes, & toutes les fractions sont commensurables à 1, par le troisiéme corollaire des définitions. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Il paroît manifestement par cette proposition, que deux nombres sourds peuvent être l'un & l'autre incommensurables à l'unité, & cependant commensurables entre eux: car $\sqrt{2}$ & $\sqrt{8}$ (en vertu de cette proposition) sont tous deux incommensurables à l'unité, & pourtant commensurables l'un à l'autre; car puisque le nombre 2 est au nombre 8 comme 1 à 4, $\sqrt{2}$ sera à la $\sqrt{8}$ comme 1 à 2.

PROPOSITION 16.

199. *S'il y a deux nombres* a *&* b *réduits aux plus simples termes de leurs raisons, & tels que leurs racines quarrées soient commensurables l'une à l'autre; je dis que les nombres* a *&* b *sont des quarrés.*

Car puisque la $\sqrt{a}$ est supposée commensurable à $\sqrt{b}$, que leur plus grande mesure commune soit contenue dans $\sqrt{a}$ les fois d, & dans $\sqrt{b}$ les fois e; cela étant d & e seront les moindres termes dans la raison de $\sqrt{a}$ à $\sqrt{b}$ par la dixiéme proposition; & puisque $\sqrt{a}$ est à $\sqrt{b}$ comme d à e, nous aurons a à b comme dd à ee; donc $\frac{a}{b} = \frac{dd}{ee}$ par le quatriéme axiôme: mais la fraction $\frac{a}{b}$ est réduite à ses moindres termes par la supposition; & nous en disons autant de la fraction $\frac{dd}{ee}$, à cause que la fraction $\frac{d}{e}$ l'étoit; donc $a = dd$, & $b = ee$; donc a & b sont tous deux des quarrés. *C. Q. F. D.*

Co-

COROLLAIRE.

Donc si a & b *sont les plus simples termes dans leur raison, & pas tous deux des quarrés,* comme 1 & 2, 2 & 3, *&c. leurs racines quarrées seront incommensurables l'une à l'autre.*

PROPOSITION 17.

200. *Si deux quantités incommensurables, comme* 2 *&* $\sqrt{3}$, *sont ajoûtées ensemble, de-sorte que de leur addition résulte une troisiéme quantité* $\overline{2+\sqrt{3}}$; *je dis que cette quantité sera incommensurable à l'une & à l'autre des parties dont elle est composée.*

Je prouverai que le nombre $\overline{2+\sqrt{3}}$ est incommensurable à $\sqrt{3}$.

Car si la chose étoit autrement, tant la quantité $\overline{2+\sqrt{3}}$ que $\sqrt{3}$ auroient quelque mesure commune; que cette mesure soit m: puis donc que la grandeur m mesure $\overline{2+\sqrt{3}}$ & $\sqrt{3}$, elle mesurera aussi leur différence 2, & par cela même elle mesurera 2 & $\sqrt{3}$; mais 2 & $\sqrt{3}$ sont incommensurables par la supposition; donc le nombre $\overline{2+\sqrt{3}}$ ne sauroit être commensurable à $\sqrt{3}$. *C. Q. F. D.* On démontrera précisément de-même, que la quantité $\overline{2+\sqrt{3}}$ est incommensurable à 2.

PROPOSITION 18.

201. *Le côté & la diagonale d'un quarré sont incommensurables.*

C'est ce qu'on peut inférer de la quinziéme proposition; car par la quarante-septiéme du premier Livre d'Euclide, si le côté d'un quarré est représenté par 1, sa diagonale sera $\sqrt{2}$; mais 1 & $\sqrt{2}$ sont incommensurables par la quinziéme proposition; donc le côté & la diagonale d'un quarré sont incommensurables. *C. Q. F. D.*

La même vérité peut se démontrer indépendamment des propositions précédentes par le secours du lemme suivant.

LEMME.

Si un nombre quarré est pair, sa racine & sa moitié seront paires aussi.

Car une racine impaire comme $2a+1$ donne un quarré impair, comme $4aa+4a+1$; au-lieu qu'une racine paire, telle que $2a$, donne un quarré pair, tel que $4aa$; & sa moitié $2aa$ est pareillement un nombre pair.

Cela étant, si le côté & la diagonale de quelque quarré n'étoient pas incommensurables, il faudroit qu'ils eussent quelque mesure commune: que leur plus grande mesure commune soit contenue dans le côté les fois a,

fois a, & dans le diamétre les fois b; ainsi a & b seront les plus petits nombres, qui expriment la raison du côté du quarré à sa diagonale; & puisque le côté est à la diagonale comme a est à b, le quarré du côté sera au quarré de la diagonale comme aa à bb; mais le quarré du côté est la moitié du quarré de la diagonale, par la quarante-septiéme du premier Livre des Elémens; donc aa est la moitié de bb; donc aa & bb sont deux nombres pairs, bb pour avoir une moitié sans fraction adhérente, & aa pour être cette moitié, suivant le lemme; donc en vertu du même lemme, les racines de ces quarrés pairs, savoir a & b, doivent être des nombres pairs; car si quelqu'un d'eux étoit impair, son quarré le seroit aussi: mais comme ces nombres sont les plus petits dans leur proportion, un d'eux au-moins doit être un nombre impair, sans quoi il y auroit moyen de réduire la proportion à des termes plus simples encore; donc si le côté & la diagonale d'un quarré n'étoient pas incommensurables, il seroit possible qu'un seul & même nombre fût pair & impair; mais cela est impossible; donc ces grandeurs sont incommensurables. *C. Q. F. D.*

Observations générales sur la matiére de l'Incommensurabilité.

202. *Scholie* 1. Il paroît par ce qui vient d'être démontré, combien les parties des quantités continues sont plus subtiles que celles des nombres; car quoique la racine quarrée de 2 ne puisse pas s'exprimer par un nombre entier ou par une fraction quelconque, nous voyons cependant que si l'on désigne le côté d'un quarré par 1, soit que cette unité signifie une aune, un pied, un pouce, ou telle autre longueur qu'on voudra, la diagonale, mesurée sur la même échelle, sera la racine de 2; il seroit même très-facile de construire une échelle qui contiendroit les racines des nombres naturels continués à discrétion depuis l'unité; mais nous aurons occasion de revenir à ce sujet, Voyez le Scholie de l'Art. 307.

Cette proposition nous donne aussi à connoître, que les aires de deux quarrés peuvent être commensurables dans le tems que leurs quarrés ne le sont pas; car l'aire d'un quarré est à l'aire d'un autre quarré fait sur la diagonale du premier comme 1 à 2; & cependant, par la derniére proposition, les côtés des deux quarrés sont incommensurables.

Scholie 2. Dans le corollaire de la troisiéme proposition il a été prouvé, que pourvu que l'incommensurabilité appartienne à une sorte de quantité continue, elle doit appartenir également à toute autre; mais dans la derniére proposition, & dans le corollaire de la quatorziéme, il est démontré que des lignes peuvent être incommensurables; donc toutes les autres quantités continues peuvent l'être. Je me contenterai de rapporter

ter un seul exemple de l'incommensurabilité dans une autre sorte de quantités, savoir le tems.

Le fameux *Huygens*, dans son admirable Traité du Mouvement des Pendules, a démontré, que les longueurs des pendules, à compter depuis le centre de suspension jusqu'au centre d'oscillation, sont comme les quarrés des tems dans lesquels ils achévent respectivement des vibrations semblables; comme si la longueur d'un pendule étoit de trois pieds mesure du Rhin; & celle d'un autre de deux pieds pareils, le quarré du tems d'une oscillation du premier pendule sera au quarré du tems d'une oscillation semblable du dernier comme 3 à 2; ainsi les tems mêmes seront comme $\sqrt{3}$ à $\sqrt{2}$, & ainsi pourront être représentés par ces deux quantités sourdes. Supposons présentement une chose qui ne s'éloigne guéres de la vérité, savoir, que $\sqrt{3}$ est à $\sqrt{2}$ comme 49 à 40; réduisant cette analogie en équation nous aurons $\sqrt{3}\times 40 = \sqrt{2}\times 49$, ce qui signifie, que quarante vibrations du plus long pendule ne font dans le même tems que quarante-neuf vibrations du plus court; si ceci étoit vrai à la rigueur, & que deux pareils pendules achevassent chacun sa vibration respective dans le même instant, après quarante autres vibrations du pendule le plus long, & quarante-neuf du plus court, leurs deux vibrations seroient de-nouveau terminées au même instant, & ainsi de suite à l'infini. Ce raisonnement est fondé sur la supposition que $\sqrt{3}$ & $\sqrt{2}$ sont comme 49 à 40, & par conséquent que $\sqrt{3}\times 40 = \sqrt{2}\times 49$; mais si nous supposons que ces deux racines sont sourdes, & par conséquent que les tems que ces racines désignent, sont (comme il est vrai) incommensurables, aucun multiple de l'une ne sauroit être égal à quelque multiple de l'autre, par la cinquiéme proposition; & il s'ensuivra de-là, que si ces deux pendules sont lâchés dans le même instant, quel que soit le nombre de leurs vibrations, il n'arrivera jamais que deux de ces vibrations soient achevées précisément dans le même instant.

Scholie 3. Avant de quitter ce sujet, j'observerai encore, que cette doctrine des incommensurables renverse de fond en comble l'hypothése des indivisibles; car s'il y avoit dans la Nature des quantités indivisibles, elles mesureroient toutes les autres, rien ne pouvant être plus petit qu'elles, & par cela même il n'y auroit point d'incommensurables, dont l'existence néanmoins vient d'être démontrée par des argumens au-dessus de toute exception.

PROBLEME I.

408. *Soient* a *&* b *deux quantités incommensurables,* a *la plus grande &* b *la plus petite; & que par la division continuelle de* a *&* de b, *suivant la mé-*

thode

thode prescrite pour trouver la plus grande mesure commune, on ait pour quotiens certains nombres revenant toujours dans le même ordre à l'infini: on demande la valeur de la fraction $\frac{a}{b}$ ou (ce qui est tout un) la raison de a à b sans aucune approximation, en admettant des nombres sourds dans l'expression de la valeur cherchée.

SOLUTION.

Que les quotiens qui reviennent dans le même ordre soient, 1, 2, 3, 1, 2, 3. 1, 2, 3. &c. à l'infini, & que les restes de la premiére division, de la seconde & de la troisiéme soient c, d & e respectivement; cela étant le quotient de a divisé par b sera 1, celui de b divisé par c, 2, celui de c divisé par d, 3; après quoi le quotient de d divisé par e sera de nouveau 1, & ainsi de suite: donc une division continuelle commencée depuis d & e, & poussée à l'infini, sera accompagnée des mêmes quotiens, tant en quantité, ordre & nombre, qu'une division continuelle commencée depuis a & b; par conséquent d aura la même raison à e que a à b, par l'Art. 180. Ceci étant posé, qu'on calcule pour a & b une série d'équations pareille à celle de l'Art. 175, & il en résultera:

$$1a - 0b = +a.$$
$$0a - 1b = -b.$$
$$1a - 1b = +c.$$
$$2a - 3b = -d.$$
$$7a - 10b = +e. \text{ \&c.}$$

Nous avons ici $d = 3b - 2a$, & $e = 7a - 10b$; mais il a été prouvé ci-dessus que d est à e comme a à b; donc $3b - 2a$ est à $7a - 10b$ comme a est à b; donc changeant l'analogie en équation, $3bb - 2ab = 7aa - 10ab$, ou $7aa - 8ab = 3bb$: nous n'avons ici qu'une équation pour déterminer les valeurs de deux inconnues a & b, & pouvons par cela même substituer à la place de l'une la quantité qu'il nous plaît; substituons donc à la place de b une quantité qui rende l'équation plus simple, par exemple 7, à cause que 7 est le coëfficient de aa dans l'équation; puis divisant toute l'équation par 7 ou par $b = 7$, nous aurons $aa - 8a = 3b$, ou $aa - 8a = 21$; c'est-là une équation du second degré, laquelle, en complettant le quarré, deviendra $aa - 8a + 16 = 37$; en tirant la racine quarrée de chaque membre de cette équation, il viendra $a - 4 = \sqrt{37}$, & $a = 4 + \sqrt{37}$; donc $\frac{a}{b} = \frac{4 + \sqrt{37}}{7}$ ou (ce qui revient au même) a est à b comme $4 + \sqrt{37}$ est à 7. *C. Q. F. D.*

N. B. 1. Quoique le nombre 37, comme tous les autres nombres,

 ait

ait deux racines, j'ai choisi la racine affirmative, à cause que $4-\sqrt{37}$ est une quantité négative.

2. Si l'on veut exprimer le numérateur de la fraction $\frac{a}{b}$ par un nombre entier, & le dénominateur par une racine sourde avec un nombre adhérent, dans l'équation précédente $7aa-8ab=3bb$, il faut faire $a=3$ coëfficient de bb, & ensuite diviser toute l'équation par a ou 3; ce qui donnera $7a-8b=bb$, c'est-à-dire, $bb+8b=21$. Cette équation étant résolue, on trouve $b=\sqrt{37}-4$; ainsi $\frac{a}{b}=\frac{3}{\sqrt{37}-4}$; ainsi a est à b comme 3 à $\sqrt{37}-4$.

3. Pour confirmer ces deux proportions, savoir, que a est à b comme $\sqrt{37}+4$ est à 7, & d'un autre côté, que a est à b comme 3 à $\sqrt{37}-4$, nous observerons que la racine quarrée de 37 est 6.08276253 à peu près, & conséquemment que $\sqrt{37}+4$ est à 7 comme 10.08276253 est à 7, ou comme 1008276253 à 700000000. Or si par la division continuelle des nombres 1008276253 & 700000000, les quotiens se trouvent être 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, la série ne continuera plus de-même en cet endroit, parce que la racine quarrée de 37 donnée ici n'est pas exacte: d'un autre côté, il est manifeste que a est aussi à b comme 3 à $\sqrt{37}-4$, c'est-à-dire, comme 300000000 à 208276253, puisque la division continuelle des nombres 300000000 & 208276253, donne cette série de quotiens 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, 2, 3. 1, &c.

4. La solution du probléme précédent fait voir, que la racine quarrée de 37 ne sauroit être exprimée par un nombre entier, ni par un nombre entier avec une fraction adhérente, ni par une fraction quelconque; car si cela étoit possible, alors il y auroit moyen d'exprimer aussi $4+\sqrt{37}$, & par conséquent ce nombre ne seroit pas incommensurable au nombre entier 7, comme l'infinité des quotiens prouve qu'il l'est. La même remarque est applicable à toutes les autres quantités sourdes trouvées par la méthode employée dans cette solution.

5. S'il étoit question de former un théorême qui fournît une solution générale du probléme précédent, il faudroit considérer avec un peu d'attention la solution particulière. Voici la méthode qu'on pourroit découvrir par ce moyen: après une série d'équations formée conformément à l'Art. 175, par le secours d'une seule circulation des quotiens 1, 2, 3, nous avons trouvé que les deux derniéres équations étoient $2a-3b=-d$, & $7a-10b=+e$; d'où j'infére, que si (conformément à l'Art. 179) une série de fractions principales est calculée à l'aide des quotiens 1, 2, 3, les deux derniéres fractions de la série seront $\frac{3}{2}$ & $\frac{10}{7}$: examinons

minons présentement la derniére équation, savoir $aa-8a=21$ ou $3b$, & nous verrons que 8 coëfficient de $-a$ dans le second terme a été trouvé en retranchant 2 de 10, c'est-à-dire, en retranchant le dénominateur de la pénultiéme fraction du numérateur de la derniére: nous trouverons aussi que 7 valeur de b vient de 7 dénominateur de la derniére fraction: enfin nous trouverons que 3 coëfficient de b dans le terme $3b$, ou de 7 dans le nombre 21, vient du nombre 3 numérateur de la pénultiéme fraction, multiplié par b ou 7 dénominateur de la derniére: toutes ces considérations réunies ensemble nous fournissent la solution générale que voici.

Par le moyen de la première circulation de quotiens, calculez (comme dans l'article cent soixante & dix-neuvième) une série de fractions principales; ensuite, multipliez le numérateur de la pénultiéme fraction par le dénominateur de la dernière, & appellez le produit p; *retranchez le dénominateur de la pénultiéme fraction du numérateur de la dernière, & nommez la différence* d; *cela étant vous aurez* b *égal au dénominateur de la dernière fraction, &* $aa-da=p$.

Exemple 1.

Que les quotiens qui reviennent toujours soient 4, 1, 1, 1. 4, 1, 1, 1. &c. à l'infini: une série de fractions principales calculée par le moyen des quotiens 4, 1, 1, 1, est $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{9}{1}, \frac{14}{1}$; & le nombre 9 numérateur de la pénultiéme fraction multiplié par 3 dénominateur de la derniére, donne $27=p$; & de plus le nombre 2, dénominateur de la pénultiéme fraction, retranché de 14 numérateur de la derniére, laisse $12=d$: faites donc $b=3$ dénominateur de la derniére fraction, & vous aurez $aa-12a=27$: en résolvant cette équation on trouve $a=6+\sqrt{63}$; donc $\frac{a}{b}=\frac{6+\sqrt{63}}{3}$; mais cette fraction peut s'exprimer plus simplement; car $\frac{6}{3}=\frac{2}{1}$, & $\frac{\sqrt{63}}{3}=\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{9}}=\sqrt{\frac{63}{9}}=\sqrt{\frac{7}{1}}$; donc $\frac{a}{b}=\frac{2+\sqrt{7}}{1}$.

Exemple 2.

Que les quotiens soient q, q, q, q, q, à l'infini; cela étant une série de fractions calculée par le quotient q sera $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}, \frac{q}{1}$, dont les deux derniéres fractions sont $\frac{1}{0}$ & $\frac{q}{1}$: or 1; numérateur de la pénultiéme fraction, multiplié par 1 dénominateur de la derniére, donne $1=p$; & 0 dénominateur de la pénultiéme fraction, retranché de q numérateur de la derniére, laisse $q=d$; faites donc $b=1$, dénominateur de la derniére fraction, &

& vous aurez $aa-qa=1$: soit $q=2$, & l'équation deviendra $aa-2a=1$; donc $a=1+\sqrt{2}$, & $\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{2}}{1}$; par conséquent si l'on divise perpétuellement les quantités $1+\sqrt{2}$ & 1, les quotiens seront 2, 2, 2, 2, 2 à l'infini; mais si $\sqrt{2}$ est divisé par 1, tous les quotiens après le premier seront les mêmes que quand $1+\sqrt{2}$ étoit divisé par 1; mais dans ce cas le premier quotient sera 1 & point 2 comme dans l'autre; donc la division toujours continuée des quantités $\sqrt{2}$ & 1 donnera pour premier quotient 1, & ensuite toujours 2, 2, 2, 2, 2 à l'infini: or tous ceux qui ont la moindre teinture de Géométrie, savent que la diagonale & le côté d'un quarré sont l'un à l'autre comme $\sqrt{2}$ à 1; d'où il suit (Voyez la 4ème. observation de cet Article) que le côté & la diagonale d'un quarré sont incommensurables, & qu'une division toujours continuée de ces quantités donnera d'abord 1, & ensuite toujours 2, 2, 2, 2, 2 à l'infini. De plus, soit $q=1$, & nous aurons $b=1$, comme auparavant, & $aa-a=1$: que le plus grand segment d'une ligne coupée en extrême & moyenne raison soit au plus petit segment comme a est à 1; cela étant, puisque (suivant la nature de cette section) toute la ligne est au plus grand segment comme le plus grand segment est au plus petit, nous avons cette proportion, $a+1$ est à a comme a est à 1, & cette équation $aa=a+1$, & $aa-a=1$: puis donc que nous retombons dans la même équation, soit que nous supposions $q=1$, ou que nous supposions que a est à 1 ou à b comme le plus grand segment de la ligne divisée en extrême & moyenne raison est au plus petit, il s'ensuit que a est à b dans cette même raison; & par conséquent qu'une division continuelle de ces segmens donnera pour quotiens 1, 1, 1, 1, 1 à l'infini.

EXEMPLE 3.

Que les quotiens soient toujours q, r. q, r. q, r. &c. à l'infini: cela étant une série de fractions principales calculée au moyen des quotiens q & r sera $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{q}{1}$, $\frac{qr+1}{r}$; où q numérateur de la pénultiéme fraction, multiplié par r dénominateur de la derniére donne $qr=p$; & 1 dénominateur de la pénultiéme fraction, retranché de $qr+1$ numérateur de la derniére, laisse $qr=d$; faites $b=r$ dénominateur de la derniére fraction, & la valeur de a se trouvera déterminée par cette équation, savoir $aa-qra=qr$: si $q=2$, & $r=1$, nous aurons cette analogie, comme a est à b ainsi $1+\sqrt{3}$ est à 1; donc une division continuelle commencée par $1+\sqrt{3}$ & 1, donnera pour quotiens 2, 1. 2, 1. 2, 1. à l'infini; mais

mais dans une division continuelle commencée par la $\sqrt{3}$ & 1, le premier quotient sera 1, & tous les autres 1, 2. 1, 2. 1, 2. à l'infini. Si $q=1$, & $r=3$, a sera à b comme $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ est à 3, ou comme $3+\sqrt{21}$ à 6.

Si l'on exigeoit de l'irrégularité dans quelques-uns des premiers quotiens, mais qu'après cela le reste revînt perpétuellement de-même, voici comment il faudroit s'y prendre: *on demande que* n *&* p *soient les deux premiers quotiens, & que le reste soit* q, r, s. q, r, s. q, r, s. *&c. à l'infini: il faut commencer d'abord par trouver à l'aide du problême précédent deux quantités* a *&* b *qui donnent à l'infini les quotiens reguliers décrits ci-dessus sans aucun autre; puis faire* $pa+b=B$, *&* $nB+a=A$, *& les deux quantités* A *&* B *donneront les quotiens requis.* Car puisque $A=nB+a$, il s'ensuit que si l'on divise A par B, le quotient sera n, & que le reste sera a: pareillement puisque $B=pa+b$, il s'ensuit que si l'on divise B par a, le quotient sera p, & que le reste sera b: la division suivante est celle de a par b, & ainsi de suite; donc si cette division est continuée à l'infini, le reste des quotiens sera $q, r, s. q, r, s. q, r, s.$ &c. à l'infini par l'hypothése.

PROBLEME 2.

204. *Je dois à quelqu'un un schelling, ou un certain nombre de schellings, & nous n'avons l'un & l'autre aucune monnoye que des guinées & des louis-d'or; les guinées valant vingt & un schellings piéce, & les louis-d'or dix-sept: la question est, comment je dois m'y prendre pour m'acquitter de cette dette.*

SOLUTION.

Par la supposition cette dette ne sauroit être payée autrement que d'une de ces trois maniéres; que je paye des guinées, & que je reçoive des louis-d'or, ou que je paye des louis-d'or, & que je reçoive des guinées, ou bien enfin que je paye des guinées & des louis-d'or: il faut donc que cette dette soit ou la somme ou la différence d'un certain nombre de guinées & d'un certain nombre de louis-d'or, & conséquemment la dette doit consister en un schelling, qui est la plus grande mesure commune d'une guinée & d'un louis-d'or, ou dans un certain nombre de schellings sans fractions; car il est manifeste que ce qui mesure deux quantités doit aussi mesurer, non seulement leurs multiples, mais aussi les sommes & les différences de ces multiples, comme nous avons déjà eu occasion de l'observer ci-dessus: & c'est-là l'unique limitation dont ce problême soit susceptible. Ceci étant donc posé, je fais $a=21$ &

$b=17$,

$b=17$, & de ces deux valeurs de a & de b, je dérive une suite d'équations comme dans l'Art. 175, savoir

$$1a-0b=+21.$$
$$0a-1b=-17.$$
$$a-1b=+4.$$
$$4a-5b=-1.$$
$$13a-16b=+1.$$

Les deux derniéres de ces équations résolvent le problême de la maniére suivante.

CAS 1.

Que la dette soit d'un schelling: cela étant si je veux payer en guinées & recevoir des louis-d'or, je choisis des deux derniéres équations celle dont le terme absolu est affirmatif, savoir $13a-16b=+1$, où l'on voit clairement, que si je paye treize guinées à mon créancier, & qu'il me rende seize louis-d'or, la dette sera acquittée; car payer treize guinées & recevoir seize louis-d'or est la même chose que payer treize guinées moins seize louis-d'or, ce qui suivant l'équation rapportée ci-dessus vaut précisément un schelling: d'un autre côté, si je voulois payer en louis-d'or, & recevoir des guinées, des deux derniéres équations je prendrois celle dont le terme absolu est négatif, savoir $4a-5b=-1$, ou $5b-4a=+1$, où l'on voit, qu'en payant cinq louis-d'or & en recevant quatre guinées, la dette d'un schelling se trouve payée; & comme ces équations $4a-5b=-1$, & $13a-16b=+1$ sont les plus simples de leur espéce par l'Art. 177, les solutions déduites de ces équations doivent être les plus simples aussi.

Pour avoir d'autres solutions de ce problême, il faut considérer, que puisque a est à b comme 21 à 17, nous avons $17a=21b$, ou $17a-21b=0$; & comme la fraction $\frac{21}{17}$ est réduite aux plus simples termes, l'équation $17a-21b=0$ est la plus simple de son espéce: ajoûtez présentement $17a-21b=0$ à l'équation $13a-16b=1$. à discrétion, & de-même ajoûtez l'équation $21b-17a=0$ à l'équation $5b-4a=1$, & vous aurez un nombre infini de solutions du problême proposé, soit que le payement se fasse en guinées & le retour en louis-d'or, ou que le payement se fasse en louis-d'or, & le retour en guinées.

CAS 2.

Que la dette soit de cinq schellings: en ce cas, si je voulois payer des guinées & recevoir des louis-d'or, je multiplierois l'équation $13a-16b=1$ par

par 5 nombre qui exprime la dette, & trouverois par ce moyen $65a - 80b = 5$: pour avoir maintenant la plus ſimple équation de cette eſpéce, c'eſt-à-dire celle dont le terme abſolu eſt $+5$, je ſouſtrais autant de fois que je le puis l'équation $17a - 21b = 0$ de l'équation $65a - 80b = 5$; & pour ſuivre la méthode la plus abrégée, je diviſe $65a$ par $17a$, c'eſt-à-dire, 65 par 17, & j'ai pour quotient 3 avec un reſte; d'où j'infére que je puis retrancher l'équation $17a - 21b = 0$ trois fois de l'équation $65a - 80b = 5$, & cependant laiſſer le coëfficient de a affirmatif: or $17a - 21b = 0$ étant multipliés par 3 donnent $51a - 63b = 0$, & cette quantité retranchée de $65a - 80b = 5$ laiſſe $14a - 17b = 5$; ainſi la maniére la plus ſimple d'acquitter la dette en faiſant le payement en guinées, eſt de donner 14 guinées & de recevoir 17 louis-d'or; & ſi de cette derniére équation $14a - 17b = 5$ on retranche de nouveau $17a - 21b = 0$, il reſtera $4b - 3a = 5$, c'eſt-à-dire, la maniére la plus ſimple de faire le payement en louis-d'or.

CAS 3.

Enfin que la dette ſoit de 100 piéces ou de 2000 ſchellings: pour réſoudre ce cas, multipliez l'équation $13a - 16b = 1$ par 2000, & vous aurez $26000a - 32000b = 2000$: pour rendre l'équation plus ſimple, diviſez 26000 par 17, ſavoir, le coëfficient de a dans l'équation $26000a - 32000b = 2000$ par le coëfficient de a dans l'équation $17a - 21b = 0$, & le quotient ſera 1529 avec un reſte: retranchez donc 1529 fois l'équation $17a - 21b = 0$, c'eſt-à-dire, l'équation $25993a - 32109b = 0$ de l'équation $26000a - 32000b = 2000$, & il vous reſtera l'équation $7a + 109b = 2000$, ce qui fait voir que ſi je paye 7 guinées & 109 louis-d'or, j'acquitte la dette de cent piéces ſans rien recevoir en retour.

C'eſt-là une des maniéres de faire la ſomme de cent piéces en guinées & en louis-d'or; & l'on trouvera autant d'autres maniéres que l'équation $17a - 21b = 0$ peut être ajoûtée de fois à l'équation $7a + 109b = 2000$, ſans détruire abſolument le coëfficient de b, ou en faire une quantité négative: ainſi pour ſavoir combien de fois cela ſe peut, diviſez 109 le coëfficient de b dans l'équation $7a + 109b = 2000$, par 21, le coëfficient de $-b$ dans l'équation $17a - 21b = 0$, & le quotient ſera 5 avec un reſte; donc il y a cinq autres maniéres de faire la ſomme de cent piéces en guinées & en louis-d'or, outre celle qui a déjà été trouvée, & par cela même ſix en tout, ſavoir,

7 guinées & 109 louis-d'or,
24 guinées & 88 louis-d'or,
41 guinées & 67 louis-d'or,
58 guinées & 46 louis-d'or,
75 guinées & 25 louis-d'or, &
92 guinées & 4 louis-d'or.

La premiére de ces maniéres résout le problême avec le plus petit nombre de guinées, & la derniére avec le plus petit nombre de louis-d'or possible, & par cela même peuvent s'appeller les solutions extrêmes du problême : mais si l'on demandoit les solutions extrêmes sans les intermédiaires, il faudroit simplement ajoûter à une des équations extrêmes déjà trouvée, savoir, $7a+109b=2000$, 5 fois l'équation $17a-21b=0$, savoir, l'équation $85a-105b=0$, à cause qu'il y a cinq autres solutions de trouvées, & l'on auroit par ce moyen $92a+4b=2000$, qui est l'autre équation extrême.

Outre les six maniéres de payer la dette sans échange, il y en a une infinité d'autres de faire le même payement par voye d'échange, comme on peut s'en convaincre en faisant une addition & une soustraction continuelle de l'équation $17a-21b=0$. *C. Q. F. D.*

Definition.

205. *Soient* q, r, s, t *des nombres donnés*, & *que* a, b, c, d, e, f, *forment une série dont on connoît les deux premiers termes* a & b, *voici comment il faudra s'y prendre pour déterminer la valeur des autres termes : faites* $qb+a=c$, $rc+b=d$, $sd+c=e$, $te+d=f$; *cela étant la série* a, b, c, d, e, f, *pourra être dite formée de ses deux premiers termes* a & b *par les nombres* q, r, s, t. Ainsi une série formée de 1 & de 0 par les nombres 2, 3, 4, 5, 6, sera 1, 0, 1, 3, 13, 68, 421; & une série formée de 0 & de 1 par les nombres 3, 4, 5, 6, sera 0, 1, 3, 13, 68, 421 : d'où il suit, que *Si une série est formée de* 1 & *de* 0 *par quelque suite des nombres* 2, 3, 4, 5, 6, & *qu'après avoir mis à part le premier nombre* 2, *on forme une autre série de* 0 & *de* 1 *par les nombres restans* 3, 4, 5, 6, *cette derniére série sera la même que la premiére, pourvu que le premier terme* 1 *en soit ôté.*

Probleme 3.

206. *On demande autant de nombres qu'on voudra, qui soient tels, que si l'on divise un d'eux par deux diviseurs donnés, dont* a *est le plus grand* & b *le plus petit, il y ait deux restes donnés* d & e *respectivement.*

SOLUTION.

Soit g un des nombres qu'on cherche, & l la plus grande mesure commune des deux diviseurs donnés a & b; cela étant, puisque l mesure a, & que a mesure $\overline{g-d}$ par la supposition, il s'ensuit que l doit mesurer $\overline{g-d}$; pareillement, puisque l mesure b, & que b mesure $\overline{g-e}$, l doit mesurer $\overline{g-e}$; ainsi l mesure les deux nombres $\overline{g-d}$ & $\overline{g-e}$; donc si l'on retranche le premier nombre du dernier, l doit mesurer le reste $\overline{d-e}$; par conséquent si ce problême est possible, $\frac{d-e}{l}$ doit être réductible à un nombre entier, affirmatif ou négatif suivant que d se trouve être plus grand ou plus petit que e. Tout ceci étant posé, qu'on assigne les valeurs de a & de b; comme par exemple, soit $a=105$ & $b=40$, & qu'on forme une série d'équations de ces deux valeurs de a & de b suivant l'Art. 175.

Equation 1, $1a-0b=+105$.
2, $0a-1b=-40$.
3, $1a-2b=+25$.
4, $1a-3b=-15$.
5, $2a-5b=+10$.
6, $3a-8b=-5$.
7, $5a-13b=+5$.

Il paroît par les deux derniéres de ces équations que 5 est la plus grande mesure commune de a & de b (Voyez Art. 175,) & par conséquent que $\frac{d-e}{5}$ doit être un nombre entier dans tous les cas possibles de ce problême. Prenez maintenant la derniére équation de la série dont le terme absolu est négatif comme $3a-8b=-5$, & vous aurez $3a+5=8b$; multipliez les termes de cette derniére équation par le nombre $\frac{d-e}{5}$, & vous aurez $3a\times\frac{d-e}{5}+5\times\frac{d-e}{5}=8b\times\frac{d-e}{5}$; c'est-à-dire, $3a\times\frac{d-e}{5}+d-e=8b\times\frac{d-e}{5}$; transposez $-e$, & vous aurez $3a\times\frac{d-e}{5}+d=8b\times\frac{d-e}{5}+e$; mais le quotient du nombre $3a\times\frac{d-e}{5}$ divisé par a est $3\times\frac{d-e}{5}$, & il ne reste rien; donc le nombre $3a\times\frac{d-e}{5}+d$ étant divisé par a, il restera d; semblablement si le nombre $8b\times\frac{d-e}{5}+e$ est divisé par b, il restera e: puis donc que $3a\times\frac{d-e}{5}+d=8b\times\frac{d-e}{5}$

$\frac{d-e}{5}+e$, le même nombre $3a\times\frac{d-e}{5}+d$, ou $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$, répondra aux deux conditions du problême; mais $a=105$ par l'hypothése; donc $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d=63\times\overline{d-e}+d$; donc le nombre $63\times\overline{d-e}+d$ satisfera de-même aux deux conditions.

Cette solution étant ainsi trouvée, on pourra en avoir tant d'autres qu'on voudra par une continuelle addition & soustraction de 840, le plus petit multiple commun de a & de b: car comme ce nombre (qu'on trouve par l'Art. 171.) étant séparément divisé par 105 & par 40, donne deux quotiens sans reste, il s'ensuit que si ce multiple commun, ou plusieurs de ces multiples sont ajoûtés à $63\times\overline{d-e}+d$, ou soustraits de cette quantité, les restes, quand la division est faite par a & b, seront parfaitement les mêmes qu'avant l'addition & la soustraction, & ainsi seront toujours d & e. Par ce moyen nous aurons une infinité de nombres tels que nous les avons décrits ci-dessus. *C. Q. F. D.*

Le théorême, qui vient d'être calculé pour les diviseurs 105 & 40, est général, quels que soient les restes d & e, pourvu que $\frac{d-e}{5}$ soit un nombre entier: par exemple, on demande un nombre, qui étant divisé séparément par 105 & par 40, donne respectivement pour restes 39 & 9: ici $d=39$, $e=9$, $d-e=30$, $63\times\overline{d-e}=1890$, $63\times\overline{d-e}+d=1929$; donc 1929 est un nombre qui satisfait aux conditions du problême: mais si l'on demandoit le plus petit nombre possible, qui y satisfît de-même, il faudroit retrancher le nombre 840 (qui est le plus petit multiple commun de 105 & de 40) autant de fois qu'il se pourra, de 1929, c'est-à-dire, il faudroit diviser 1929 par 840, & le reste 249 seroit le plus petit nombre, lequel étant divisé par 105 & par 40, auroit respectivement pour restes 39 & 9. Que ces restes (pour donner un autre exemple) au-lieu d'être 39 & 9, soient 9 & 39 par rapport à a & b respectivement; cela étant, $d-e$ sera -30, & $63\times\overline{d-e}=-1890$, & $63\times\overline{d-e}+d=-1890+9=-1881$; divisez -1881 par 840, & le reste sera -201, lequel est le plus petit nombre négatif de cette espéce; mais il nous faut le plus petit nombre affirmatif; c'est pourquoi si au nombre négatif déjà trouvé, savoir -201, on ajoûte le plus petit multiple commun 840, on aura 639 pour le plus petit nombre affirmatif, lequel étant divisé par 105 & par 40, laisse respectivement pour restes 9 & 39.

Si quelqu'un souhaitoit une démonstration synthétique, qui prouvât que le nombre $63\times\overline{d-e}+d$, ou $64d-63e$, étant séparément divisés par 105 & par 40, donnent respectivement pour restes d & e, il suffiroit pour

pour cela qu'il observât, que si les diviseurs 105 & 40 avoient été premiers entre eux, la chose auroit paru clairement par la simple division du nombre $64d-63e$ par 105 & par 40; mais comme ces nombres ne sont point premiers entre eux, il y a d'autres considérations à faire que voici. Puisque $64d-63e$ étant divisés par 105, le dernier reste doit être d, j'extermine l'autre quantité $-63e$ de la maniére suivante: la plus grande mesure commune de 105 & de 40 est 5: donc $\frac{d-e}{5}$ est un nombre entier en vertu de ce qui a déjà été prouvé; or $63\times\overline{d-e}=5\times 63\times\frac{d-e}{5}$, ou $315\times\frac{d-e}{5}$ (dont le multiplicateur & le multiplicande sont également des nombres entiers); & le nombre $315\times\frac{d-e}{5}$ est divisible sans reste par 105, à cause que le nombre 315 l'est; donc $63d-63e$ se divisent par 5, sans reste; donc si l'on ajoûte $63d-63e$ à un nombre quelconque, ou qu'on l'en retranche, & que la somme ou la différence soit divisée par 105, le reste de cette division sera le même que si une pareille addition ou soustraction n'avoit jamais été faite; retranchez donc $63d-63a$ de $64d$, $63e$, & il restera d; par conséquent $64d-63e$, étant divisés par 105, auront d pour reste. Ensuite je divise $64d-63e$ par 40, & il reste $24d-23e$; mais si le théorême est vrai, le nombre e doit être le dernier reste: pour m'en convaincre, je retranche l'autre quantité $24d$ du reste $24d-23e$ de la maniére suivante: $24\times\overline{d-e}$, ou $120\times\frac{d-e}{5}$ est un nombre divisible sans reste par 40; retranchez donc $24d-24e$ de $24d-23e$, & il restera e; donc $64d-63e$ étant divisés par 40 auront e pour reste. *C. Q. F. D.*

Passons présentement à la formation d'un théorême général pour deux diviseurs quelconques a & b, où les restes soient possibles. Dans cette vue examinons la solution précédente, par laquelle il a paru que le nombre $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$ satisfaisoit aux conditions du problême. Or si l'on veut bien faire attention à la maniére dont cette solution a été trouvée, on s'appercevra aisément que dans cette expression $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$, le nombre 3 étoit le coëfficient de a dans la derniére équation de la série précédente, dont le terme absolu est négatif, & que le nombre 5 étoit la plus grande mesure commune des deux diviseurs donnés a & b: faites donc $r=3$, $l=5$ comme ci-dessus, & l'expression $\frac{3a}{5}\times\overline{d-e}+d$ sera changée en celle-ci, $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d$: mais il nous reste encore à surmonter

ter la plus grande difficulté, qui eſt de découvrir la valeur du nombre r ſans calculer toutes les équations dans les ſéries précédentes, c'eſt-à-dire, de trouver le coëfficient de a dans la derniére équation de celles dont les termes abſolus ſont négatifs, ou (ce qui revient au même) de trouver le coëfficient de a dans la derniére équation qui occupe un rang pair dans les ſéries: car un ſimple coup-d'œil jetté ſur ces ſéries ſuffit pour faire voir que tous les rangs pairs ſont remplis par des équations dont les termes abſolus ſont négatifs. Cela étant, il paroît clairement par la nature & par la génération de ces équations, que les coëfficiens de a, depuis la premiére équation juſqu'à la derniére, ſont une ſérie de nombres formée de 1 & de 0 par les quotiens d'une diviſion continuelle des diviſeurs a & b; & le dernier article démontre qu'une pareille ſérie eſt toujours équivalente à une ſérie commençant depuis 0 & 1, & formée par les mêmes quotiens à l'exception du premier; donc en cherchant le nombre r, le premier de ces quotiens peut toujours être mis à quartier, pourvu qu'on commence le calcul depuis 0 & 1. De plus, ſi le nombre des quotiens ſe trouve impair, le dernier quotient nous donnera un coëfficient de a, qui occupe un rang impair, au-lieu que c'eſt dans un rang pair que doit être le dernier coëfficient que nous cherchons; c'eſt pourquoi ſi le nombre des quotiens eſt impair, tant le premier que le dernier doivent être rejettés; mais ſi le nombre en eſt pair, il ne faut que rejetter le premier quotient, & réduire le dernier, c'eſt-à-dire, le diminuer d'une unité, comme on fait toujours en calculant la derniére équation, ſoit qu'elle occupe un rang pair ou impair, (Voyez Art. 175), & l'équation, que nous cherchons préſentement, ſera, en ce cas, la derniére de la ſérie. Cela étant, ſi l'on forme une ſérie de nombres depuis 0 & 1 par le ſecours des quotiens en queſtion, le dernier terme de la ſérie ſera r, & le nombre $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d$, qui ſatisfait aux conditions du problême, ſera connu.

Si l'on demande ce qu'il faut faire, quand (en trouvant la plus grande meſure commune l) le nombre des quotiens eſt pair, & le dernier quotient $= 1$, l'unité ne pouvant être réduite; ma réponſe eſt, qu'un pareil cas ne ſauroit jamais avoir lieu.

EXEMPLE I.

Soit $a = 105$, $b = 40$, & par conſéquent $l = 5$, comme dans le problême précédent; & les quotiens d'une diviſion continuelle de a & de b ſeront 2, 1, 1, 1, 2; laiſſez-là le premier & le dernier, à cauſe de leur rang impair, & des quotiens qui reſtent 1, 1, 1, formez de 0 & de 1 la ſérie

férie fuivante o, 1, 1, 2, 3, & r fera le dernier terme 3; donc $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e}$ $+ d$, fera $\frac{3a}{5} \times \overline{d-e} + d = 63 \times \overline{d-e} + d$.

N. B. Auffi longtems que les divifeurs a & b font en même raifon l'un à l'égard de l'autre, l'expreffion du nombre cherché favoir $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e}$ $+ d$ fera la même, que les divifeurs foient ce qu'ils voudront; car les nombres $\frac{a}{l}$ & $\frac{b}{l}$ étant les derniers dans leur proportion, doivent toujours être les mêmes, ce qui eft vrai pareillement des quotiens dont le nombre r eft dérivé: ainfi toute la différence confiftera fimplement dans les différentes reftrictions auxquelles les reftes d & e pourront être fujets; car fi ce problême eft poffible $\frac{d-e}{l}$ doit toujours être un nombre entier, comme on l'a vu ci-deffus: par exemple, fi au-lieu de prendre pour divifeurs 105 & 40, nous avions pris 21 & 8, les plus petits dans leur proportion, le nombre $63 \times \overline{d-e} + d$ n'auroit pas laiffé de fatisfaire aux conditions du problême; & en ce cas les reftes d & e auroient pu être faits deux nombres entiers quelconques, puifque $\frac{d-e}{1}$ eft toujours un nombre entier.

EXEMPLE 2.

Que les divifeurs donnés a & b foient 840 & 36, dont la plus grande mefure commune l eft 12, & les quotiens, au moyen defquels cette mefure fe trouve, 23 & 3, occupant l'un & l'autre des rangs pairs; ainfi laiffez-là 23, & réduifez l'autre quotient 3 à 2, & la férie formée de o & de 1 fera o, 1, 2; donc en ce cas $r = 2$, & $\frac{ra}{l} \times \overline{d-e} + d$ fera $140 \times \overline{d-e} + d = 141 d - 140 e$, qui eft un nombre tel que l'exige le problême, comme il y a moyen de le démontrer fynthétiquement de la maniére fuivante. D'abord j'extermine $- 140e$, après avoir obfervé que $140d - 140e$ ou $140 \times \overline{d-e}$ ou $1680 \times \frac{d-e}{12}$ eft un nombre divifible par 840; donc $140d - 140e$ peuvent être retranchés de $141d - 140e$ fans affecter le refte; cette fouftraction étant faite, il reftera d: voici comment je m'y prends enfuite pour exterminer d; $141d - 141e$, ou $141 \times \overline{d-e}$, ou $1692 \times \frac{d-e}{12}$ eft un nombre divifible par 36, & par cela même $141 d - 141e$ peuvent être retranchés de $141d - 140e$ fans affecter le refte; ainfi faites cette fouftraction, & vous aurez pour refte e.

EXEM-

EXEMPLE 3.

Faites $a=9$, $b=7$; par conséquent $l=1$, & les quotiens trouvés en cherchant la valeur de l seront 1, 3, 2, nombre impair; laissez-là le premier & le dernier de ces quotiens, ne faisant usage que de celui du milieu, qui est 3, & la série sera 0, 1, 3; donc $r=3$, & $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d$ $=27\times\overline{d-e}+d=28d-27e$; & comme les diviseurs 9 & 7 sont des nombres premiers entre eux, la démonstration synthétique sera très-facile; car si l'on divise $28d$ par 9 le reste sera d, & si $27e$ sont divisés par 9, le reste sera 0; donc la division de $28d-27e$ ne laisse pour reste que d: de plus, si l'on divise $28d$ par 7, il ne restera rien, & si $-27e$, c'est-à-dire, si $-28e+e$ sont divisés par 7, le reste sera e; par conséquent $28d-27e$ divisés par 7 donneront pour reste e; & c'est ce qui arrivera toujours tant que les nombres d & e seront premiers entre eux; c'est-à-dire, que la vérité de la règle donnée se manifeste par une simple division sans autre opération, les restes en ce cas n'étant assujettis à aucune restriction.

EXEMPLE 4.

Soit $a=30$, $b=10$, & par conséquent $l=10$, & il n'y aura qu'un seul quotient d'une division perpétuelle de 30 & de 10, savoir 3: nombre, qui doit être rejetté pour deux raisons; car il est non seulement le premier quotient, mais aussi le dernier, le nombre des quotiens étant impair; ainsi il n'y a pas moyen d'ajoûter aux deux premiers termes 0 & 1 de la série d'autres termes; parce qu'il n'y a point de quotiens par lesquels quelques autres termes puissent être engendrés; donc en ce cas, le dernier terme 1 doit être considéré comme le dernier terme de la série. Ici donc $r=1$, & $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d=3\times\overline{d-e}+d$ $=4d-3e$, ce que je démontre ainsi: le nombre $3d-3e$ ou $30\times\frac{d-e}{10}$ est un multiple de 30; ainsi retranchez $3d-3e$ de $4d-3e$, & il restera d: d'un autre côté $4d-4e$ ou $40\times\frac{d-e}{10}$ est un multiple de 10; retranchez donc $4d-4e$ de $4d-3e$, & il restera e.

EXEMPLE 5.

Soit $a=13$, $b=7$, & par conséquent $l=1$; de plus soit $e=0$; & les quotiens d'une continuelle division commencée par 13 & 7 seront 1, 1, 6; rejettez le premier & le dernier de ces quotiens à cause qu'ils occupent des

des rangs impairs, & le quotient restant sera 1, & la série même 0, 1, 1; donc $r=1$, & $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d=14d$, ce qui satisfera aux conditions du problême; car $14d$ étant divisés par 13, il restera d, & si l'on divise $14d$ par 7, il ne restera rien.

EXEMPLE 6.

Supposons que l'année présente de notre Ere soit mille sept cens trente & neuf, & qu'il y a eû, il n'y a pas tout-à-fait deux siécles une année, dans laquelle le cycle solaire étoit huit, & le cycle lunaire dix: on demande quelle étoit cette année.

N. B. Si à quelque année de notre Ere on ajoûte 9, & que la somme soit divisée par 28, le reste, ou 28, s'il ne reste rien, est ce qu'on appelle le cycle solaire pour cette année-là; & si l'on ajoûte 1 à quelque année de notre Ere, & que la somme soit divisée par 19, le reste, ou 19, s'il ne reste rien, est le cycle lunaire: il suit de-là que si quelque année de notre Ere est divisée séparément par 28 & par 19, & que les restes soient d & e respectivement, $d+9$, ou $d+9-28$ sera le cycle solaire, & $e+1$ ou $e+1-19$ sera le cycle lunaire pour cette année-là: or dans le cas, que nous avons supposé, $d+9$ ne sauroit être égal à 8, parce que d seroit alors une quantité négative; faites donc $d+9-28=8$, & vous aurez $d=27$; outre cela, faites $e+1=10$, & vous aurez $e=9$; ainsi la question se trouve réduite à ceci; *Quel est le nombre, lequel étant séparément divisé par vingt & huit & par dix-neuf, aura respectivement pour restes vingt & sept & neuf?*

Ici $a=28$, $b=19$, $l=1$, $d=27$, $e=9$, & les quotiens d'une division continuelle commencée par 28 & 19, sont 1, 2 & 9, en nombre impair; ainsi retranchez le premier & le dernier de ces quotiens, & avec le quotient 2 qui reste formez la série 0, 1, 2; donc $r=2$, & $\frac{ra}{l}\times\overline{d-e}+d=56\times\overline{d-e}+d$ ou $57\times\overline{d-e}+e$, ce qui donne une formule générale pour trouver l'année de notre Ere qui répond aux deux cycles donnés: substituez présentement à d & à e leur valeur, c'est-à-dire, faites $d=27$ & $e=9$, & vous aurez $56\times\overline{d-e}+d=1035$, nombre qui est trop petit pour satisfaire aux conditions du problême, & qu'il faut aggrandir de la maniére suivante: le plus petit multiple commun de 28 & de 19 est 532; d'où il suit qu'après une révolution de 532 ans, les deux cycles se retrouvent les mêmes qu'ils étoient 532 ans auparavant: ainsi ajoûtez une révolution périodique de 532 ans à 1035, nombre trouvé ci-dessus, & la somme 1567 sera le vrai nombre de l'année cherchée, com-

me étant entre les limites marquées ci-dessus: car $1567+9$, ou 1576 étant divisés par 28, il reste 8 pour le cycle solaire; & $1567+1$, ou 1568 étant divisés par 19, il reste 10 pour le cycle lunaire.

PROBLEME 4.

207. *On demande des nombres à discrétion, qui ayent cette propriété, savoir, que si quelqu'un d'eux est divisé séparément par trois diviseurs donnés* a, b *&* c, *dont* a *est supposé le plus grand &* c *le plus petit, les restes soient trois nombres donnés* d, e *&* f *respectivement.*

SOLUTION.

Désignez par A *le plus petit multiple commun de* a *& de* b; *puis trouvez (par le dernier problême) deux nombres* g *&* h *de telle nature, que* g *étant divisé par* a *& par* b *ait* d *&* e *pour restes, & que* h *étant divisé par* A *& par* c *ait pour restes* g *&* f; *je dis, cela étant, que* h *est un des nombres qui satisfera aux conditions: Et quand un pareil nombre est trouvé, on peut en avoir autant d'autres qu'on voudra, par une addition ou une soustraction continuelle du plus petit multiple commun des trois diviseurs* a, b *&* c, *trouvé par l'Art.* 172.

La démonstration de cette solution est facile; car puisque par la supposition a mesure A, & que A mesure $\overline{h-g}$, a mesure $\overline{h-g}$; mais a mesure aussi $\overline{g-d}$; donc a mesure également $\overline{h-g}$ & $\overline{g-d}$, & par conséquent leur somme $\overline{h-d}$: pareillement, puisque b mesure A, & que A mesure $\overline{h-g}$, b mesure $\overline{h-g}$; mais b mesure aussi $\overline{g-e}$; donc b mesure $\overline{h-e}$; donc puisque a mesure $\overline{h-d}$, & que b mesure $\overline{h-e}$, il suit, que h étant séparément divisé par a & par b, les restes seront d & e respectivement: mais si h est divisé par c, le reste est f par l'hypothése; donc h est un nombre tel, qu'étant divisé par les trois diviseurs donnés a, b & c, on aura les trois restes donnés d, e & f respectivement. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE I.

On demande un nombre, qui, étant divisé séparément par 105, par 40 & par 36, ait pour restes d, e & f respectivement.

Avant que d'entreprendre la solution de ce problême, ou de quelque autre problême de cette nature, nous devons examiner s'ils ne sont point sujets à quelque restriction, afin de pouvoir juger si ces sortes de problêmes sont possibles ou non: entreprenons ici cet examen, & nous trouverons que si le problême est possible, les restes d, e & f seront tels, que $\frac{d-e}{5}$, $\frac{d-f}{3}$, & $\frac{e-f}{4}$ devront nécessairement être tous des nombres

bres entiers: c'est ce qui paroît manifestement par la solution du problême précédent; car le nombre 5 est la plus grande mesure commune de a & de b, le nombre 3 celle de a & de c, & le nombre 4 celle de b & de c: voyons donc si à l'aide de ces suppositions nous pouvons construire & démontrer une formule générale pour les diviseurs donnés sans avoir recours à quelque autre moyen. Premiérement donc nous devons trouver un nombre qui, étant séparément divisé par les deux premiers diviseurs 105 & 40, ait pour restes d & e; or on ne sauroit douter qu'un pareil nombre ne puisse être désigné par $64d - 63e$, comme dans le premier exemple du problême précédent; appellez ce nombre g: cela étant, comme le plus petit multiple commun des deux premiers diviseurs 105 & 40 est 840, nous devons trouver un autre nombre qui, étant divisé par 840 & par le troisiéme diviseur 36, ait pour restes g & f: un pareil nombre est sans-contredit $141g - 140f$, comme dans le second exemple du même problême; faites donc $64d - 63e = g$, & $141g - 140f = h$, & la grandeur h sera le nombre requis dans le problême.

S'il falloit, sans avoir recours à g, exprimer la valeur de h uniquement à l'aide des restes d, e & f, rien ne seroit plus facile: car puisque $g = 64d - 63e$, nous aurons $141g - 140f = 9024d - 8883e - 140f = h$; divisez le nombre $9024d - 8883e - 140f$ par 2520, (lequel étant le plus petit multiple commun de tous les trois diviseurs, ne sauroit affecter les restes rélativement à ces diviseurs,) & vous aurez pour reste une plus petite valeur de h, égale à $1464d - 1323e - 140f$; ajoûtez à cette valeur $2520e + 2520f$ pour rendre tous les termes affirmatifs, & vous aurez $h = 1464d + 1197e + 2380f$, qui est la moindre valeur de h qu'on puisse exprimer en ces termes généraux, jusqu'à ce qu'on ait désigné le restes d, e & f par des nombres déterminés.

Les démonstrations synthétiques de ces formules ont quelque chose de très-curieux; & c'est ce qui m'a engagé à choisir cet exemple, comme étant très-propre à faciliter l'intelligence des formules en question. Il s'agit donc de prouver, que le nombre h trouvé ci-dessus, savoir, $1464d + 1197e + 2380f$, est tel qu'étant séparément divisé par 105, par 40 & par 36, il aura pour restes d, e & f. Pour le démontrer, je divise premiérement h par 105, & trouve que le reste est $99d + 42e + 70f$; mais afin de rendre ce reste plus simple, & d'essayer si le dernier reste de cette division sera d, j'efface les deux autres quantités $42e$ & $70f$ à l'aide de ces deux restrictions, dans lesquelles le dernier reste d se trouve mêlé, savoir, en supposant que $\frac{d-e}{5}$ & $\frac{d-f}{3}$ sont des nombres entiers. Je dis donc: le nom-

bre $42d-42e$, ou $42\times\overline{d-e}$, ou $210\times\frac{d-e}{5}$, est divisible par 105 sans reste; donc on peut ajoûter $42d-42e$ à $99d+42e+70f$ sans affecter les restes suivans; faites cette addition, & la somme sera $141d+70f$: outre cela, le nombre $70d-70f$, ou $210\times\frac{d-f}{3}$, est divisible par 105, & ainsi on peut ajoûter $70d-70f$ à $141d+70f$, & la somme sera $211d$, laquelle étant divisée par 105 il restera d; donc b est un nombre tel, qu'étant divisé par 105, il aura pour reste d. Je divise ensuite le nombre b, ou $1464d+1197e+2380f$, par le diviseur suivant 40, & trouve que le reste est $24d+37e+20f$, au-lieu que le dernier reste doit être e; c'est pourquoi j'extermine les deux quantités $24d$ & $20f$ par le moyen de deux restrictions, c'est-à-dire, en supposant que $\frac{d-e}{5}$ & $\frac{e-f}{4}$ sont des nombres entiers, ce qui me met en état d'exterminer d par la premiére de ces suppositions, & f par la seconde: car le nombre $24d-24e$, ou $120\times\frac{d-e}{5}$, est divisible par 40; donc $24d-24e$ peuvent être soustraits de $24d+37e+20f$, & le reste sera $61e+20f$: de plus, $20e-20f$, ou $80\times\frac{e-f}{4}$ est divisible par 40; donc $20e-20f$ peuvent être ajoûtés à $61e+20f$, & la somme sera $81e$, laquelle étant divisée par 40 aura pour reste e. Enfin je divise le nombre $1464d+1197e+2380f$ par 36, & le reste est $24d+9e+4f$; mais le dernier reste doit être f; c'est pourquoi j'extermine $24d+9e$, en supposant que $\frac{d-f}{3}$ & $\frac{e-f}{4}$ sont des nombres entiers: raisonnant donc comme ci-dessus, je dis, le nombre $24d-24f$, ou $72\times\frac{d-f}{3}$, est divisible par 36; donc on peut soustraire $24d-24f$ de $24d+9e+4f$, & il restera $9e+28f$: de plus, le nombre $9e-9f$, ou $36\times\frac{e-f}{4}$, est divisible par 36; donc on peut soustraire $9e-9f$ de $9e+28f$, & il restera $37f$, lesquels étant divisés par 36 laissent pour reste f; donc le nombre $1464d+1197e+2380f$ est tel qu'étant divisé par 105, par 40 & par 36, il aura pour restes d, e & f respectivement. C. Q. F. D.

N. B. Si les diviseurs avoient été 60, 45 & 36, l'exemple auroit été aussi bon, & les opérations plus simples.

Exemple 2.

Que les diviseurs soient 9, 8 & 6: cela étant, comme les nombres 9 & 8 sont premiers entre eux, les restrictions seront réduites à ces deux-

ci,

ci, ſavoir, que $\frac{d-f}{3}$ & $\frac{e-f}{2}$ doivent être l'un & l'autre des nombres entiers. Cette ſuppoſition étant admiſe, voici la formule: faites $64d-63e=g$, & $13g-12f=h$, & h déſignera un nombre tel qu'on le demande: ôtez g de cette formule, & vous aurez $832d-819e-12f=h$; diviſez par 72 (le plus petit multiple commun des trois diviſeurs donnés) pour rendre l'expreſſion plus ſimple, & puis ajoûtez $72e+72f$ afin de n'avoir que des quantités affirmatives, & vous aurez $40d+45e+60f$ pour la plus petite valeur de h dans le cas préſent.

Si l'on vouloit démontrer ce théorême ſynthétiquement, il faudroit diviſer le nombre $40d+45e+60f$ par le premier diviſeur 9, & l'on auroit pour reſte $4d+6f$; mais comme d doit être le dernier reſte, il eſt néceſſaire d'ôter $6f$ à l'aide de la reſtriction qui ſuppoſe $\frac{d-f}{3}$ un nombre entier, ce qui ſe fera ainſi: le nombre $6d-6f$, ou $18\times\frac{d-f}{3}$ eſt diviſible par 9; donc $6d-6f$ peuvent être ajoûtés à $4d+6f$, & la ſomme ſera $10d$, laquelle étant diviſée par 9 laiſſe d. Je paſſe après cela au diviſeur ſuivant 8, diviſant $40d+45e+60f$ par 8, & le reſte eſt $5e+4f$; mais e doit être le dernier reſte: ainſi $4f$ doivent être ôtés à l'aide de la ſuppoſition que $\frac{e-f}{2}$ eſt un nombre entier. Je dis donc: le nombre $4e-4f$, ou $8\times\frac{e-f}{2}$ eſt diviſible par 8; donc $4e-4f$ peuvent être ajoûtés à $5e+4f$, & la ſomme ſera $9e$, leſquels étant diviſés par 8 laiſſent pour reſte e. Enfin, je diviſe $40d+45e+60f$ par le dernier diviſeur 6, & le reſte eſt $4d+3e$: or ces deux quantités (f devant être le dernier reſte) ſeront exterminées ainſi: le nombre $4d-4f$, ou $12\times\frac{d-f}{3}$, eſt diviſible par 6; donc $4d-4f$ peuvent être retranchés de $4d+3e$, & il reſtera $3e+4f$; mais le nombre $3e-3f$, ou $6\times\frac{e-f}{2}$, eſt auſſi diviſible par 6; donc $3e-3f$ peuvent être retranchés de $3e+4f$, & il reſtera $7f$, leſquels étant diviſés par 6 laiſſeront pour reſte f. *C. Q. F. D.*

EXEMPLE 3.

Que les diviſeurs ſoient 6, 5 & 4, & les reſtes ne ſeront alors ſujets qu'à une ſeule reſtriction, qui eſt que $\frac{d-f}{2}$ doit être un nombre entier. Nous aurons en ce cas la formule ſuivante $25d-24e=g$, & $16g-15f=h$; g étant exterminé, il vient $400d-384e-15f=h$; diviſez par 60

 (le

(le plus petit multiple commun des trois diviseurs donnés) & ajoûtez au reste $60e + 60f$ pour rendre tous les termes affirmatifs, & il viendra $40d + 36e + 45f = h$. Pour être convaincu de la justesse de cette opération, on n'a qu'à diviser $40d + 36e + 45f$ par le premier diviseur 6, & le reste sera $4d + 3f$; mais le nombre $3d - 3f$, ou $6 \times \frac{d-f}{2}$, est divisible par 6; donc $3d - 3f$ peuvent être ajoûtés à $4d + 3f$, & la somme sera $7d$, laquelle étant divisée par 6 laisse pour reste d. Si l'on continue ensuite à diviser $40d + 36e + 45f$ par les deux autres diviseurs 5 & 4 séparément, les restes seront respectivement e & f, comme on peut le voir par une simple division.

Il paroît par ces exemples, & par la nature des opérations mêmes, qu'on n'a jamais besoin d'autres restrictions que celles qu'on déduit de la nature des diviseurs au commencement du problême; & que quand quelque restriction pareille ne sauroit s'en déduire, il n'en faut aucune, les restes se trouvant par une simple division; c'est ce qui paroîtra par l'exemple suivant.

EXEMPLE 4.

On demande en quelle année de notre Ere le cycle du Soleil a été huit, le cycle de la Lune dix, & le cycle d'Indiction dix.

Il est bon de se souvenir ici, que si à quelque année de notre Ere on ajoûte 3, & qu'on divise la somme par 15, le reste, ou 15 s'il ne reste rien, s'appelle le cycle d'Indiction pour cette année-là: il suit de-là, comme aussi des définitions des deux autres cycles déja données dans le dernier exemple de l'Article précédent, que si l'on divise quelque année de notre Ere par 28, par 19 & par 15, & que les restes soient d, e & f respectivement, $d+9$, $e+1$ & $f+3$, seront les cycles respectifs du Soleil, de la Lune & d'Indiction; mais s'il arrivoit que ces nombres fussent plus grands que 28, 19 & 15, en ce cas $d+9-28$, $e+1-19$, & $f+3-15$ seroient les cycles respectifs: ainsi nous avons trois équations pour déterminer d, e & f, savoir, $d+9-28=8$, $e+1=10$, & $f+3=10$; donc $d=27$, $e=9$, & $f=7$; de-sorte qu'il s'agit simplement de *trouver un nombre, lequel étant divisé par* 28, 19 *&* 15, *ait pour restes* 27, 9 & 7; nous continuerons cependant à appeller ces restes d, e & f, jusqu'à ce que nous ayons construit une formule générale pour les nombres 28, 19 & 15, laquelle ne sauroit être assujettie à aucune restriction, à cause que les nombres 28 & 19 sont premiers entre eux, & pareillement tous deux premiers au troisiéme nombre 15. Ici donc $g = 57d - 56e$, & $h = 1065g - 1064f = 60705d = 59640e - 1064f$; divisez ce nombre par 7980 (le plus petit multiple commun des trois diviseurs donnés)

donnés) & le reste sera $4845d - 3780e - 1064f$; ajoûtez $7980e + 7980f$ pour que toutes les quantités soient positives, & vous aurez $4845d + 4200e + 6916f$ le plus petit nombre de cette formule qui réponde aux conditions, & par le moyen duquel on peut aussi trouver une année quelconque de notre Ere, dont les trois cycles, & par cela même d, e & f soient donnés, ou, ce qui revient au même, la place que cette année occupe dans la Période Julienne. Comme par exemple, à la place de d, e & f substituez leurs valeurs trouvées ci-dessus, savoir, 27, 9 & 7, & vous aurez $4845d + 4200e + 6916f = 130815 + 37800 + 48412 = 217027$; lequel nombre étant divisé par 7980 laisse 1567 pour l'année de notre Ere qu'il s'agit de trouver; si l'on ajoûte séparément à cette année 9, 1 & 3, & qu'on divise les sommes par 28, 19 & 15, les restes seront 8, 10, & 10, c'est-à-dire, les trois cycles proposés.

La Période Julienne est une révolution de 7980 ans, dont le commencement précède la création du Monde, & qui n'est pas écoulée encore: son caractère distinctif est, que si le nombre qui exprime quelque année de cette Période est divisé par 28, 19 & 15, les restes seront les trois cycles du Soleil, de la Lune & d'Indiction pour cette année-là: ainsi trouver la place que l'année en question occupe dans la Période Julienne, n'est autre chose que déterminer un nombre, lequel étant divisé par 28, par 19, & par 15, aura les trois cycles 8, 10 & 10 pour restes. Faites donc $d = 8$, $e = 10$, & $f = 10$, & vous aurez $4845d + 4200e + 6916f = 149920$: nombre, qui étant divisé par 7980 laisse 6280; donc l'année qu'on cherche est la 6280ème de la Période Julienne, laquelle répond à la 1567ème de notre Ere. Observons à cette occasion en passant, que *si à quelque année de notre Ere on ajoûte 4713, la somme sera l'année correspondante de la Période Julienne*: la raison de ceci est, que la différence entre 1567 & 6280 est 4713.

SCHOLIE.

Je compte qu'à l'aide de ce qui a été dit dans les deux derniers problêmes, & particuliérement dans celui-ci, l'apprentif Algébriste se trouvera en état de résoudre des cas plus compliqués, c'est-à-dire, où il y aura plus de diviseurs & plus de restes donnés, & par conséquent plus de restrictions nécessaires; & je ne doute nullement qu'il ne puisse adapter ces restrictions à des démonstrations synthétiques pour tous les cas.

Ces deux derniers problêmes sont très-curieux, & m'autorisent par cela même à espérer qu'on me pardonnera de m'y être si longtems arrêté. Cependant j'ai ômis plusieurs observations qui y ont rapport, & cela uniquement par la crainte d'ennuyer la plupart de mes Lecteurs.

PRO-

PROBLEME 5.

208. *A deux nombres donnés* a & b, *dont* a *est le plus grand*, *trouver deux multiples dont la différence soit un nombre donné quelconque divisible par la plus grande mesure commune de* a & *de* b.

SOLUTION.

Que d représente en général la différence des multiples cherchés; que $a=13$, $b=7$, & leur plus petit multiple commun sera 91 par l'Art. 171. Ceci étant supposé, trouvez par le troisiéme problême un nombre lequel étant divisé par a ait pour reste d, & étant divisé par b n'ait aucun reste; un pareil nombre sera $14d$, comme il paroît par le cinquiéme exemple de ce problême; donc $13d$ & $14d$ sont deux multiples de a & de b respectivement, qui satisferont aux conditions du problême. De plus, comme le nombre 91, & par conséquent celui de $91d$, est un multiple commun tant de a que de b, si la grandeur $13d$, qui est un multiple de a, est retranchée de $91d$, aussi multiple de a, le reste $78d$ doit aussi être un multiple de a par l'Art. 169; & si l'on soustrait $14d$, qui est un multiple de b, de $91d$, autre multiple de b, le reste $77d$ sera aussi un multiple de b; donc $78d$ & $77d$ sont deux autres multiples de a & de b respectivement, & résoudront également bien le problême; les deux premiers multiples le résolvent, quand on veut que le multiple de a soit plus petit que celui de b, au-lieu qu'il faut faire usage des deux derniers, si l'on veut que le multiple de a soit plus grand que celui de b; mais dès que la chose est indifférente, on employe avec le même succès les uns & les autres. Que si l'on vouloit réduire les multiples dans les deux cas indiqués aux plus simples de leur genre, c'est-à-dire, si dans les deux cas nous voulions trouver les plus petits multiples de a & de b dont la différence fût d, les plus petits multiples dans les deux cas, c'est-à-dire, $13d$ & $77d$ devroient être séparément divisés par le plus petit multiple commun de a & de b, c'est-à-dire, par 91: supposons la chose faite, & que les restes soient m & n respectivement: je dis cela étant, que m sera le plus petit multiple de a qui ajoûté à d puisse former un multiple de b, & que n sera le plus petit multiple de b qui ajoûté à d puisse former un multiple de a.

Premiérement, il est clair que le reste m est un multiple de a; puisque le diviseur 91, & le dividende $13d$ le sont. En second lieu, la quantité $m+d$ est un multiple de b; car si le nombre 91, étant retranché de $13d$ autant de fois qu'il est possible, laisse pour reste m, ce nombre retranché le même nombre de fois de $14d$ laissera pour reste $\overline{m+d}$; & cette

te quantité $\overline{m+d}$ doit être un multiple de b, à cauſe que 91 & $14d$ le ſont. Enfin, il paroît par la nature de la diviſion, & par l'Art. 173, que les multiples m & $\overline{m+d}$ doivent être les plus petits en leur genre; car le reſte m, ſi la diviſion eſt bien faite, ne ſauroit jamais être plus grand que le diviſeur, qui étoit le plus petit multiple commun de a & de b, ni même égal à ce diviſeur, à moins qu'on n'ait voulu abſolument qu'il y eût un reſte; donc les multiples m & $\overline{m+d}$ ſont les plus petits en leur genre dans le premier cas: & par la même raiſon les multiples n & $\overline{n+d}$ ſeront les plus petits en leur genre dans le dernier cas. Ainſi nous avons trouvé non ſeulement deux ſortes de multiples, qui réſolvent également le problême; mais auſſi les plus petits multiples de chaque ſorte. *C. Q. F. D.*

N. B. 1°. Si m, ou n, ou tous deux, ſont égaux à rien, leurs places doivent être remplies par le plus petit multiple commun de a & de b. C'eſt ce qui ne peut jamais avoir lieu, à moins que b ou a, ou tous deux ne meſurent d: ſi b meſure d, & par conſéquent $13d$, en ce cas la grandeur $13d$ ſera un multiple de b; mais cette même grandeur eſt auſſi un multiple de a par la conſtruction; nous avons donc le nombre $13d$ pour multiple commun de a & de b, & comme tel, ce nombre eſt diviſible ſans reſte par 91, le plus petit multiple commun de a & de b; donc en ce cas le reſte m, ſi on ne ſubſtitue aucune grandeur à ſa place, ſera égal à rien: pareillement, ſi a meſure d, & par conſéquent $77d$, le nombre $77d$ ſera un multiple commun de a & de b, & la grandeur n égale à rien; donc ſi b & a meſurent d, les valeurs de m & n ſeront $=0$.

2°. Si au-lieu des nombres 13 & 7 nous avions employé pour la ſolution de ce problême, d'autres nombres qui euſſent entre eux la même raiſon, comme 39 & 21, dont la plus grande meſure commune eſt 3, la formule adaptée à ces nombres auroit été la même que la précédente, c'eſt-à-dire, les multiples de 39 & de 21 auroient été exprimés par $13d$ & par $14d$ dans le premier cas, & par $78d$ & $77d$ dans le dernier; mais la démonſtration ſynthétique auroit été tant ſoit peu différente; car en ce cas $\frac{d}{3}$ auroit dû être un nombre entier, & il auroit fallu argumenter ainſi: la grandeur $13d$ ou $\frac{39d}{3}$ eſt un multiple de 39, & le nombre $14d$, ou $\frac{42d}{3}$, eſt un multiple de 21, & ainſi ces multiples ſatisferont à la condition du problême: de plus $78d$ & $77d$, ou $\frac{234d}{3}$ & $\frac{231d}{3}$ ſont les mul-

multiples de 39 & de 21 respectivement, à cause que les nombres 234 & 231 sont tels.

Voici un exemple de la solution que nous venons de donner. On demande deux multiples de 13 & de 7 dont la différence soit 500. Ici $13d$ ou 6500 étant divisés par 91 laissent pour reste 39; ainsi $m=39$: de plus, $77d$ ou 38500 divisés par 91 laissent pour reste 7; ainsi $n=7$; donc le nombre 39 est le plus petit multiple de 13, qui avec 500 fasse de 539 un multiple de 7; & d'un autre côté, le nombre 7 est le plus petit multiple de 7, qui avec 500 fasse de 507 un multiple de 13.

PROBLEME 6.

209. *Qu'il y ait deux nombres donnés comme* a *&* b, *dont le plus petit multiple commun soit* c, *& outre cela un troisiéme nombre comme* d, *qui soit divisible par la plus grande mesure commune de* a *&* de b; *on demande de trouver, s'il est possible, deux multiples de* a *& de* b, *dont la somme soit ce nombre donné* d, *ou (ce qui revient au même) on demande de partager le nombre donné* d *en deux parties telles, que l'une des parties soit un multiple de* a, *& l'autre un multiple de* b.

SOLUTION.

Par le moyen du dernier problême trouvez m le plus petit multiple de a, qui étant augmenté de d puisse faire un multiple de b; & retranchant m de c le plus petit multiple commun de a & de b, nommez le reste r; ou si m, avant qu'on fasse la substitution indiquée ci-dessus, est égal à rien, faites $r=c$; en ce cas, si r est plus grand que d ou égal à d, le problême ne sera susceptible d'aucune solution; mais si r est plus petit que d, je dis qu'il sera le plus petit multiple de a, & $\overline{d-r}$ le plus grand multiple de b qui satisfassent au problême: & cette premiére solution étant trouvée, si le problême en admet davantage, il sera facile de les avoir par une addition & une soustraction continuelles du plus petit multiple commun c, comme $\overline{r+c}$ & $\overline{d-r-c}$, $\overline{r+2c}$ & $\overline{d-r-2c}$, $\overline{r+3c}$ & $\overline{d-r-3c}$, &c.: c'est pourquoi si $\overline{d-r}$ dans la premiére solution est divisé par c, de-sorte qu'il ait quelque reste comme s, le quotient qui marque combien de fois c peut être soustrait de $\overline{d-r}$, fait voir aussi combien de solutions le problême admettra après la premiére; & par cela même ce quotient augmenté de l'unité exprimera le nombre total des solutions; enfin je dis que le nombre s sera le plus petit multiple de b, & $\overline{d-s}$ le plus grand multiple de a, qui résoudront le problême de cette façon-là; de-sorte que les nombres r & $\overline{d-r}$, comme aussi $\overline{d-s}$ & s peuvent s'appeller les solutions extrêmes;

mes; excepté quand le problême n'admet qu'une seule solution, dans laquelle ces extrêmes se réunissent en ce cas.

DEMONSTRATION.

1. Puisque par la construction c & m sont multiples de a, leur différence $\overline{c-m}$ ou r sera un multiple de a par l'Article 169; & puisque c & $\overline{m+d}$ sont multiples de b, leur différence $\overline{m-c+d}$ ou $\overline{d-r}$ sera un multiple de b.

2. Quand $\overline{d-r}$ a été divisé par c, le reste étoit s; donc c mesure $\overline{d-r-s}$: puis donc que b mesure c, & que c mesure $\overline{d-r-s}$, b mesure $\overline{d-r-s}$; mais b mesure $\overline{d-r}$, comme nous l'avons prouvé ci-dessus; donc b mesure tant $\overline{d-r}$ que $\overline{d-r-s}$, & par conséquent leur différence s; donc s est un multiple de b: de plus, puisque a mesure c, & que c mesure $\overline{d-r-s}$, a mesure $\overline{d-r-s}$; mais a mesure r, comme on l'a vu ci-dessus; donc a mesure tant r que $\overline{d-r-s}$, & par conséquent leur somme $\overline{d-s}$; donc $\overline{d-s}$ est un multiple de a.

3. Nous devons démontrer en dernier lieu, que r & $\overline{d-r}$, comme aussi $\overline{d-s}$ & s sont des solutions extrêmes: & d'abord, s'il y avoit moyen de trouver à ce problême quelque solution, dans laquelle il y eût un plus petit multiple de a que r, on ne pourroit parvenir à cette solution qu'en retranchant le plus petit multiple commun c de r, & en l'ajoûtant à $\overline{d-r}$, & les multiples seroient alors $\overline{r-c}$ & $\overline{d-r+c}$; mais r ou $\overline{c-m}$ ne peut jamais être plus grand que c, & par conséquent $\overline{r-c}$ doit être une quantité $=0$, ou négative, (deux cas exclus du problême); donc r est nécessairement le plus petit multiple de a, & $\overline{d-r}$ le plus grand multiple de b qui puissent résoudre le problême: & par un raisonnement tout pareil on peut démontrer que s est le plus petit multiple de b, & $\overline{d-s}$ le plus grand multiple de a qui puissent résoudre le problême.

Exemple pour la solution précédente.

On demande de partager le nombre 500 en deux parties telles, qu'une partie soit un multiple de 13, & l'autre un multiple de 7. Ici $a=13$, $b=7$, $c=91$, & $d=500$, comme dans le dernier problême; & puisque m y a été trouvé égal à 39, nous aurons $\overline{c-m}$ ou $r=52$, & $\overline{d-r}=448$; donc 52 & 448 sont les premiers nombres qui puissent résoudre ce problême, le premier étant un multiple de 13, & le dernier de 7: divisez

448 par 91 & le quotient sera 4, avec un reste de 84; par conséquent le nombre 416, qui est un multiple de 13, & celui de 84, qui est un multiple de 7, sont les derniers nombres qui puissent résoudre le problême. Les solutions sont au nombre de cinq, & étant rangées comme il faut seront dans l'ordre suivant, tous les nombres de la premiére colomne étant autant de multiples de 13, & tous ceux de la seconde autant de multiples de 7.

1. 52 & 448,
2. 143 & 357,
3. 234 & 266,
4. 325 & 175,
5. 416 & 84.

LEMME 12.

THEOREME.

210. *Que* $\frac{a}{b}$ *exprime une fraction réduite à ses moindres termes, & que cette fraction soit multipliée par quelque nombre entier* d, *de-sorte que le produit* $\frac{ad}{b}$ *puisse être aussi un nombre entier: je dis qu'en ce cas le multiplicateur* d *doit être ou égal à* b, *ou quelque multiple de ce dénominateur.*

Car puisque par la supposition, la fraction $\frac{ad}{b}$ est équivalente à quelque nombre entier, que ce nombre soit c; ainsi nous aurons $c = \frac{ad}{b}$, & $\frac{c}{d} = \frac{a}{b}$; donc la fraction $\frac{c}{d}$, doit ou être la même que la fraction $\frac{a}{b}$, ou réductible à cette fraction, comme à ses moindres termes, par la plus grande mesure commune de c & de d, puisque $\frac{a}{b}$ est supposé réduit à ses moindres termes: si $\frac{c}{d}$ est la même fraction que $\frac{a}{b}$, d doit être la même grandeur que b, qui est un cas du lemme; si $\frac{c}{d}$ est égal à $\frac{a}{b}$, quoique exprimé par d'autres nombres, que e soit la plus grande mesure commune de c & de d; cela étant $\frac{c}{e}$ sera $= a$ & $\frac{d}{e} = b$, & $d = eb$, auquel cas d est un multiple de b. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

J'infére de-là, que si $\frac{a}{b}$ *exprime quelque fraction réduite à ses moindres termes, le dénominateur* b *sera le plus petit nombre par lequel cette fraction puisse être multipliée pour la réduire à un nombre entier.*

PRO-

PROBLEME 7.

211. *Soient* a, b, c, d, e, &c. *un nombre d'aiguilles semblables à celles d'une Montre, qui tournent toutes uniformement sur le même centre, & qui se meuvent toutes dans le même sens; & que les mêmes lettres* a, b, c, d, e, &c. *représentent aussi leurs tems périodiques respectifs, ou des nombres proportionels à ces tems: Quel sera le période synodique de tout le système, c'est-à-dire, en supposant que toutes ces aiguilles partent du même point comme* s, *en quel tems se retrouveront-elles toutes ensemble pour la première fois, soit que cette conjonction arrive au point* s, *ou dans quelque autre endroit du cercle, où ces mouvemens se font?*

N. B. Dire que des deux aiguilles *a* & *b*, *a* devance *b* d'un cercle & demi, ou de deux cercles & demi, ou de trois cercles & demi, c'est dire en d'autres termes que *a* devance *b* d'un demi-cercle; & dire que *a* devance *b* d'un cercle, ou de deux cercles, ou de trois cercles, est la même chose que si l'on disoit que les aiguilles *a* & *b* coïncident: *Et toutes les fois que quelque distance angulaire de ce genre est exprimée par un nombre mixte, ou par une fraction improprement ainsi nommée, la réduire* (phrase qui reviendra fréquemment dans la solution suivante) *signifie deux choses, premiérement retrancher le nombre entier adhérent à la fraction, & puis réduire la fraction proprement dite qui reste à ses moindres termes:* par exemple, la distance $3\frac{4}{6}$ après la réduction devient $\frac{2}{3}$; car c'est la même chose de dire que *a* devance *b* de trois cercles & de quatre sixiémes d'un cercle, que de dire que *a* est deux tiers de cercle plus avant que *b*, ou un tiers de cercle en arriére. Ce langage étant ainsi expliqué, voici la solution.

SOLUTION.

1°. Soit p le période synodique des deux premiéres aiguilles a & b: cela étant pour déterminer la distance où l'aiguille a se trouve du point s à la fin du tems p, dites, si dans le tems a l'aiguille fait une révolution, combien de révolutions & de parties de révolution fera-t-elle dans le tems p? & la réponse est $\frac{p}{a}$; donc la distance où l'aiguille a se trouve du point s au bout du tems p est $\frac{p}{a}$; & par la même raison la distance où l'aiguille b se trouve du point s est $\frac{p}{b}$; donc la différence de ces deux fractions, savoir $\frac{p}{a} - \frac{p}{b}$ marque de combien l'aiguille a a devancé l'aiguille b durant le tems p; mais depuis que les deux aiguilles a & b sont parties du point s, & se sont séparées l'une de l'autre, elles ne peuvent

jamais se rejoindre, à moins que l'une n'ait devancé l'autre d'un cercle entier; donc si p est le période synodique des deux aiguilles, nous aurons $\frac{p}{a} - \frac{p}{b} = 1$, & $p = \frac{ab}{b-a}$: le tout dans la supposition que l'aiguille a est celle qui se meut avec le plus de vitesse; mais si c'est b qui avance le plus vite, nous aurons $\frac{p}{b} - \frac{p}{a} = 1$, & $p = \frac{ab}{a-b}$; en général, p est le produit des deux nombres a & b divisés par leur différence. Et si p désigne le tems au bout duquel les deux aiguilles a & b se rejoignent pour la premiére fois, au bout du tems $2p$ elles se rejoindront pour la seconde fois, & au bout du tems $3p$ pour la troisiéme fois, & ainsi de suite.

2°. Au bout du tems p, la distance où l'aiguille a, & par cela même les aiguilles a & b se trouvent du point s sera $\frac{p}{a}$, comme auparavant; & au bout de ce même tems la distance où l'aiguille c se trouve du même point s sera $\frac{p}{c}$; réduisez donc ces deux distances $\frac{p}{a}$ & $\frac{p}{c}$, & puis prenant leur différence, réduisez cette différence à ses plus simples termes $\frac{n}{q}$; & alors la distance où l'aiguille c est des deux aiguilles réunies a & b au bout du tems p, sera $\frac{n}{q}$, & au bout du tems $2p$, $\frac{2n}{q}$, & au bout du tems $3p$, $\frac{3n}{q}$, &c. & par conséquent au bout du tems pq la distance où l'aiguille c sera des deux aiguilles réunies a & b sera n; mais n est un nombre entier, & désigne un nombre entier de cercles ou de révolutions; donc au bout du tems pq l'aiguille c coïncidera avec les deux autres aiguilles a & b; & il paroît clairement par le dernier Article, que c'est pour la premiére fois que les aiguilles a, b & c se trouvent réunies depuis leur départ de s, le dénominateur q étant le plus petit nombre par lequel la fraction $\frac{n}{q}$ puisse être multipliée pour en faire un nombre entier; donc le tems pq est le période synodique des trois premiéres aiguilles a, b & c.

3°. Au bout du tems pq, la distance où l'aiguille a, & par conséquent les trois aiguilles a, b & c se trouvent du point fixe s, est $\frac{pq}{a}$; & la distance où l'aiguille d se trouve de ce même point, est $\frac{pq}{d}$; ainsi réduisant les distances $\frac{pq}{a}$ & $\frac{pq}{d}$, que leur différence après la réduction soit une fraction, qui réduite à ses moindres termes ait pour dénominateur r, & le tems pqr sera le période synodique des quatre premiéres aiguilles a, b, c & d.

4°. Au

4°. Au bout du tems pqr la distance où a se trouve de s sera $\frac{pqr}{a}$, & la distance qui sépare e de s sera $\frac{pqr}{e}$; & si ces distances sont réduites, & que leur différence soit aussi réduite à son plus petit dénominateur s, le tems $pqrs$ sera le période synodique des cinq aiguilles a, b, c, d, e: & ainsi de suite. Ce que nous venons de dire, énoncé en forme de règles revient proprement à ceci.

1°. *Multipliez l'un par l'autre les deux tems périodiques* a *&* b, *& puis divisant leur produit par leur différence, appellez le quotient* p, *soit que ce soit un nombre entier, ou une fraction.*

2°. *Réduisez les deux distances* $\frac{p}{a}$ *&* $\frac{p}{c}$, *comme aussi leur différence à leur plus petit dénominateur* q.

3°. *Réduisez les distances* $\frac{pq}{a}$ *&* $\frac{pq}{d}$, *comme aussi leur différence à leur plus petit dénominateur* r.

4°. *Réduisez les distances* $\frac{pqr}{a}$ *&* $\frac{pqr}{e}$, *comme aussi leur différence à leur plus petit dénominateur* s, *&c. Je dis, cela étant, que* p *sera le période synodique des deux premières aiguilles,* pq *celui des trois premières,* pqr *celui des quatre premières,* pqrs *celui des cinq premières, &c.*

N. B. Il n'importe nullement, rélativement à la conclusion, quel ordre on juge à propos de suivre en comparant ensemble les tems périodiques des aiguilles.

EXEMPLE.

Soit $a=3$, $b=7$, $c=10$, $d=12$, $e=15$.

SOLUTION.

1°. $p=\frac{21}{4}$; donc $\frac{p}{a}$ est $\frac{7}{4}$, & étant réduit $\frac{3}{4}$; $\frac{p}{c}$ est $\frac{21}{40}$, & la différence entre $\frac{3}{4}$ & $\frac{21}{40}$ est $\frac{9}{40}$; donc $q=40$.

2°. Donc $pq=\frac{21}{4}\times 40=210$; donc $\frac{pq}{a}$ est 70, & étant réduit devient o; $\frac{pq}{d}$ est $\frac{210}{12}$, & étant réduit $\frac{1}{2}$, & la différence entre o & $\frac{1}{2}$ est $\frac{1}{2}$: donc r est 2.

3°. Donc $pqr=420$; donc $\frac{pqr}{a}$ est 140, & étant réduit devient o; $\frac{pqr}{e}$ est 28, & étant réduit devient o, & la différence entre o & o est o,

ou $\frac{1}{1}$; donc s eſt 1. De-ſorte que le période ſynodique des deux premiéres aiguilles eſt $\frac{21}{4}$, celui des trois premiéres 210, celui des quatre premiéres 420, & celui des cinq premiéres 420; ce qui fait voir que les aiguilles d & e ſe ſont retrouvées au même point, préciſément dans l'inſtant que les trois premiéres a, b & c s'y retrouvoient auſſi.

Si l'aiguille b ſe mouvoit dans un ſens contraire à celui de a, alors l'équation qui détermine p ne ſeroit point $\frac{p}{a} - \frac{p}{b} = 1$ comme auparavant, mais $\frac{p}{a} + \frac{p}{b} = 1$; ainſi p ſe trouvera égal à $\frac{ab}{a+b}$; car les aiguilles a & b doivent être conſidérées comme ſituées dans des ſens contraires rélativement au point s, auquel cas la ſomme de leurs diſtances de ce point déſignera la diſtance où elles ſont l'une de l'autre: de plus, ſi c ſe meut dans un ſens contraire à celui de a, les diſtances $\frac{p}{a}$ & $\frac{p}{c}$ devront être réduites comme auparavant; mais alors il faut que ce ſoit leur ſomme, & pas leur différence, qui étant réduite à ſes moindres termes donne le dénominateur q; & ainſi de ſuite.

PROBLEME 8.

212. *Qu'il y ait trois quantités inconnues* x, y *&* z, *dont les rélations ſoient exprimées par les deux équations ſuivantes*,

$$x + 2y + 3z = 20, \text{ \&}$$
$$4x + 5y + 6z = 47:$$

On demande les valeurs de x, y *&* z *en nombres entiers & affirmatifs.*

SOLUTION.

1ére. Eq. $x + 2y + 3z = 20$.
2de. Eq. $4x + 5y + 6z = 47$.

Retranchez la ſeconde équation de la premiére multipliée par quatre, & vous aurez, $3y + 6z = 33$; donc

3éme. Eq. $y = 11 - 2z$.

Retranchez cinq fois la premiére équation de deux fois la ſeconde, & vous aurez $3x - 3z = -6$, & pour

4éme. Eq. $x = z - 2$.

Nous trouvons ainſi les valeurs de x & y rélativement à z, dont il n'y a pas moyen de déterminer la valeur, à cauſe qu'il y a trois grandeurs inconnues & ſeulement deux équations: & l'on verra clairement que ce ſont-là les véritables valeurs de x & de y, ſi l'on ſubſtitue $z - 2$ à la place de x dans la premiére équation, & $11 - 2z$ à la place de y dans la ſeconde; car en vertu de cette ſuppoſition nous aurons dans la premiére

re équation $x+2y+3z=z-2+22-4z+3z=20$, & dans la seconde équation nous aurons $4x+5y+6z=4z-8+55-10z+6z=47$. Or par rapport aux valeurs de x, de y & de z, il paroît clairement par la troisiéme équation & par la quatriéme, que quelque nombre entier qu'on substitue à la place de z, x & y doivent être des nombres entiers; car si z est un nombre entier, non seulement $z-2$ ou x sera un nombre entier, mais aussi $11-2z$ ou y; donc si le problême n'étoit sujet qu'à cette seule limitation, savoir, que x, y & z fussent des nombres entiers, le nombre des solutions seroit infini; mais outre cette premiére restriction, il est dit de plus, que les grandeurs, dont il s'agit, doivent être affirmatives; & pour cette raison, si nous voulons avoir le nombre des solutions rélatives aux deux restrictions réunies ensemble, il faut considérer de nouveau les valeurs de x & de y dans les deux derniéres équations: or puisque dans la quatriéme équation $x=z-2$, il est clair que si la grandeur x est affirmative, la grandeur z doit surpasser 2: outre cela, puisque dans la troisiéme équation $y=11-2z$, si la grandeur y est affirmative, $2z$ doivent être plus petits que 11, & z plus petit que $5\frac{1}{2}$; d'où il s'ensuit, à plus forte raison, que z doit être plus petit que 6; donc, afin que x & y soient affirmatifs aussi bien que z, la valeur de z doit se trouver entre ces deux limites, savoir, 2 & 6; donc pour que les trois quantités x, y & z soient affirmatives, il n'y a que trois nombres qu'on puisse substituer à la place de z, savoir les nombres 3, 4 & 5; si bien que par la derniére limitation du problême, le nombre infini de solutions dont il seroit susceptible, se réduit présentement à trois, qu'on détermine ainsi: puisque quelqu'un des trois nombres 3, 4 & 5 peut être mis à la place de z, que z soit 3; cela étant, nous aurons $z-2$ ou $x=1$, & $11-2z$ ou $y=5$; de-sorte que les nombres x, y & z seront 1, 5 & 3 respectivement, & satisferont aux conditions des deux équations primitives; car dans cette supposition $x+2y+3z=1+10+9=20$, & $4x+5y+6z=4+25+18=27$. Soit $z=4$, nous aurons $z-2$ ou $x=2$, $11-2z$ ou $y=3$, & les nombres seront 2, 3 & 4, qui satisferont encore aux mêmes conditions; car en ce cas $x+2y+3z=2+6+12=20$, & $4x+5y+6z=8+15+24=47$. Que z soit $=5$; cela étant $z-2$ ou $x=3$, $11-2z$ ou $y=1$, & les nombres seront 3, 1 & 5; nous aurons derechef dans cette supposition $x+2y+3z=3+2+15=20$, & $4x+5y+6z=12+5+30=47$.

x	y	z.
1	5	3.
2	3	4.
3	1	5.

LEMME 13.

PROBLEME.

213. *Soient* a, b *&* c *trois nombres fixes ou déterminés, dont* a *&* b *soient premiers entre eux; & que* x *&* y *soient deux nombres entiers variables ou indéterminés, dont la rélation soit constamment exprimée par l'équation* $ax \mp by = c$; *quelles seront les valeurs les plus proches de* x *& de* y *exprimées en nombres entiers, dont la rélation puisse aussi être exprimée par la même équation?*

CAS I.

Soit l'équation $ax-by=c$, & que $x+d$ & $y+e$ désignent les nouvelles valeurs de x & de y; cela étant, puisque le rapport qu'ont entre elles ces deux valeurs, doit être exprimé par la même équation, qui a exprimé la rélation entre les valeurs précédentes, l'équation sera $ax+ad-by-be=c$; mais $ax-by=c$ par l'hypothése; donc $ad-be=0$, & $be=ad$, & $\frac{e}{d}=\frac{a}{b}$; donc si e & d sont deux nombres en même raison que a & b, les valeurs $x+d$ & $y+e$ auront entre elles le même rapport que x & y: mais pour trouver les valeurs les plus proches de x & de y, e & d doivent non seulement être en même raison que a & b, mais aussi réduits à leurs moindres termes: puis donc que les deux fraction $\frac{a}{b}$ & $\frac{e}{d}$ sont égales en valeur, & toutes deux réduites à leurs moindres termes, elles doivent aussi être égales en termes, c'est-à-dire, e doit être égal à a, & d à b; ainsi les valeurs les plus proches de x & de y dans la même rélation, sont $x+b$ & $y+a$, ou $x-b$ & $y-a$.

CAS 2.

Que l'équation soit $ax+by=c$, & que $x+d$ & $y+e$ soient les valeurs les plus proches de x & de y dans la même rélation, & l'équation sera $ax+ad+by+be=c$; mais $ax+by=c$ par l'hypothése; donc $ad+be=0$; donc $be=-ad$, & $\frac{e}{d}=-\frac{a}{b}$; donc si e & d sont réduits à leurs moindres termes, comme ils doivent l'être, il faut que e soit égal à $-a$ & d à b, ou que e soit égal à $+a$ & d à $-b$; ainsi les deux valeurs les plus proches de x & de y dans la même rélation, seront $x+b$ & $y-a$, ou $x-b$ & $y+a$.

COROLLAIRE.

Il suit de-là, que si les valeurs de x *sont prises en progression arithmétique, dont la différence commune soit* b *coëfficient de* y, *les valeurs respectives de* y *formeront aussi une progression arithmétique, dont la différence commune sera* a *coëfficient de* x: *& si l'équation est* $ax - by$ &c., *les deux équations croîtront ou décroîtront à la fois; mais si l'équation est* $ax + by$ &c., *& que les valeurs de* x *forment une progression croissante, celles de* y *formeront une progression décroissante, & réciproquement.*

PROBLEME 9.

214. *On demande de partager cent en trois parties, comme* x, y *&* z, *de telle sorte que* $9x + 15y + 20z$ *fassent quinze cens.*

SOLUTION.

1ére. Eq. $x + y + z = 100$.
2de. Eq. $9x + 15y + 20z = 1500$.

Retranchez neuf fois la premiére équation de la seconde, & vous aurez $6y + 11z = 600$; donc

3éme. Eq. $y = 100 - \frac{11z}{6}$.

Retranchez la seconde équation de quinze fois la premiére, & vous aurez $6x - 5z = 0$; donc

4éme. Eq. $x = \frac{5z}{6}$.

Et si l'on substitue ces valeurs de x & de y trouvées dans les deux derniéres équations à la place de x & de y dans les deux premiéres, elles satisferont aux conditions du problême.

Rélativement aux valeurs de x & de y, savoir, $x = \frac{5z}{6}$, & $y = 100 - \frac{11z}{6}$, il est clair que si l'on met pour z quelque nombre divisible par 6 sans reste, c'est-à-dire, quelque terme de cette progression arithmétique 6, 12, 18, 24, &c. à l'infini, la grandeur x se trouvera un nombre entier & affirmatif; mais comme $y = 100 - \frac{11z}{6}$, il est manifeste que y ne sauroit être affirmatif, à moins que $\frac{11z}{6}$ ne soient plus petits que 100, c'est-à-dire, à moins que $11z$ ne soient plus petits que 600, ou z plus petit que $54\frac{6}{11}$; donc il ne faut jamais supposer z égal à un nombre plus grand que 54; mais on peut supposer z égal à quelque multiple de 6 depuis 6 jusqu'à 54 inclusivement. Or comme l'équation exprimant le rapport de gran-

deur entre x & z est $6x-5z=0$, il s'ensuit du dernier article, que si les valeurs de z sont prises dans une progression arithmétique croissante dont la commune différence soit 6, les valeurs correspondantes de x formeront une progression arithmétique croissante dont la différence commune sera 5: outre cela, puisque l'équation exprimant la rélation entre y & z étoit $6y+11z=600$, il s'ensuit que si les valeurs de z vont en augmentant suivant une progression arithmétique dont la différence soit 6, les valeurs de y se trouveront dans une progression arithmétique dont la différence commune sera 11. Faites $z=6$, & $100-\frac{11z}{6}$ ou y seront égaux à 89, & $\frac{5z}{6}$ ou x seront égaux à 5, & les trois nombres trouvés 5, 89 & 6, satisferont aux conditions du problême.

Pour ce qui est des autres solutions (car il y en a neuf en tout) elles se trouvent aisément à l'aide des observations faites ci-dessus, & sont toutes rangées par ordre dans la table suivante:

x	y	z.
5	89	6.
10	78	12.
15	67	18.
20	56	24.
25	45	30.
30	34	36.
35	23	42.
40	12	48.
45	1	54.

PROBLEME 10.

215. *On demande de partager le nombre de vingt & quatre en trois parties* x, y *&* z, *qui soient telles, que* x + 8y + 12z *fassent deux cens & un, &c.*

SOLUTION.

1ére. Eq. $x+y+z=24$.
2de. Eq. $x+8y+12z=201$.

Retranchez la premiére équation de la seconde, & vous aurez $7y+11z=177$; donc

3éme. Eq. $y=\frac{177-11z}{7}$.

Retranchez la seconde équation de huit fois la premiére, & vous aurez $7x-4z=-9$; donc

4éme.

4ème. Eq. $x = \frac{4z-9}{7}$.

Il paroît par la troisiéme équation & par la quatriéme, que pour rendre x & y des nombres entiers aussi bien que z, il faut substituer à la place de z un nombre qui rende non seulement $\frac{177-11z}{7}$, mais aussi $\frac{4z-9}{7}$ un nombre entier: or si les deux fractions $\frac{177}{7}$ & $\frac{9}{7}$ avoient été des nombres entiers, ce problême auroit pu se résoudre comme le précédent; mais comme cela n'est pas, nous devons nous y prendre d'une autre maniére: mais avant que d'aller plus loin, recherchons si ces deux conditions, savoir, que tant $\frac{177-11z}{7}$ que $\frac{4z-9}{7}$ sont des nombres entiers, se trouvent réellement avoir lieu; faute de quoi le problême seroit impossible: divisez donc $4z-9$ par 7, ce qui dans le cas présent n'est autre chose que soustraire 7 de $4z-9$, & le reste sera $4z-2$; divisez aussi $177-11z$ par 7, & le reste sera $2-4z$: ainsi nous n'avons plus à examiner s'il est possible que $\frac{4z-2}{7}$ & $\frac{2-4z}{7}$ soient tous deux des nombres entiers; & cette supposition est si éloignée de toute impossibilité, qu'une de ses parties implique nécessairement l'autre, ces deux nombres étant le même nombre pris affirmativement & négativement: ainsi il faut qu'ils soient tous deux affirmatifs, ou qu'aucun d'eux ne le soit. Voyons présentement quel est le plus petit nombre qui étant mis pour z fasse de $\frac{4z-2}{7}$ un nombre entier; pour cet effet, que le dénominateur 7 soit égal à a, & le nombre 4 coëfficient de z dans le numérateur égal à b, & de ces valeurs de a & de b formez une suite d'équations comme dans l'Art. 175; ce qui vous donnera:

$$1a - 0b = +7.$$
$$0a - 1b = -4.$$
$$a - b = +3.$$
$$a - 2b = -1.$$
$$3a - 5b = +1.$$

Des deux derniéres équations prenez celle dont le terme absolu est négatif, savoir, $a-2b=-1$, à cause que -2, partie numérique du numérateur $4z-2$, est une quantité négative; & puis multipliant l'équation $a-2b=-1$ par 2, c'est-à-dire par cette même partie numérique prise affirmativement, vous aurez $2a-4b=-2$, la plus simple équation de sa sorte: faites 4, coëfficient de $-b$ dans cette derniére équation, $=z$, & remettant à la place de a & de b leurs valeurs, savoir, 7 & 4, l'équa-

quation fera changée en celle-ci $14-4z=-2$, & vous aurez $\frac{4z-2}{7}=2$, nombre entier; donc si le nombre entier 4 est mis pour z, les deux autres parties x & y feront aussi des nombres entiers, & l'on aura x ou $\frac{4z-9}{7}=1$, & y ou $\frac{177-11z}{7}=19$: ainsi les parties x, y & z feront 1, 19 & 4 respectivement. Pour savoir maintenant suivant quelles progressions les valeurs de x, y & z varieront, puisque $7x-4z=-9$, il faut considérer, qu'en vertu de l'Art. 213, si les valeurs de z augmentent continuellement de 7, les valeurs de x augmenteront continuellement de 4: d'un autre côté, il suit de l'équation $7y+11z=177$, que si les valeurs de z augmentent continuellement de 7, celles de y diminueront continuellement de 11; donc puisque la premiére valeur de x est 1, ses différentes valeurs feront 1, 5, 9, 13, *&c.*; les différentes valeurs de y feront 19, 8, -3, -14, *&c.* & enfin celle de z feront 4, 11, 18, 25, *&c.* ce qui fait voir que ce problême n'est susceptible que de deux solutions, à cause qu'à la troisiéme y devient une quantité négative: nous avons donc ici $x=1$, $y=19$, $z=4$; ou $x=5$, $y=8$, & $z=11$.

PROBLEME II.

216. *Supposons que quelqu'un achette quarante oiseaux de trois différentes sortes, savoir, des perdrix, des alouettes & des cailles, pour quatre-vingt-dix-huit sous, & qu'il paye trois sous piéce pour les perdrix, un demi sou piéce pour les alouettes, & quatre sous piéce pour les cailles: on demande combien il a eu d'oiseaux de chaque sorte.*

SOLUTION.

Appellez le nombre des perdrix x, celui de alouettes y, & celui des cailles z; cela étant $3x$, $\frac{y}{2}$, & $4z$ exprimeront le nombre des sous donnés pour chaque sorte, & le problême, exprimé d'une maniére abstraite, fera: *Si* $x+y+z=40$, *&* $3x+\frac{y}{2}+4z=98$, *ou* $6x+y+8z=196$; *quelles sont les valeurs de* x, y *&* z?

1ere. Eq. $x+y+z=40$.

2de. Eq. $6x+y+8z=196$.

Retranchez la seconde équation de six fois la premiére, & vous aurez $5y-2z=44$. Donc

3éme. Eq. $y=\frac{2z+44}{5}$.

Retranchez la premiére équation de la seconde, & vous aurez $5x+7z=156$; donc

4éme. Eq. $x=\frac{156-7z}{5}$; donc $\frac{2z+44}{5}$ & $\frac{156-7z}{5}$.

doi-

doivent être l'un & l'autre des nombres entiers: chose dont je démontre la possibilité ainsi: divisez $156-7z$ par 5, & le reste sera $1-2z$; divisez $2z+44$ par 5, & le reste sera $2z+4$: ce reste, si l'on en retranche encore une fois 5, deviendra $2z-1$: comparant donc les deux restes $2z-1$ & $1-2z$, la question se trouvera réduite à ceci, savoir, si $\frac{2z-1}{5}$ étant un nombre entier $\frac{1-2z}{5}$ peut l'être aussi; & la réponse sera, que si le premier est un nombre entier, le dernier doit l'être aussi, puisqu'il n'est que la quantité négative de l'autre; c'est pourquoi $\frac{2z+44}{5}$ étant un nombre entier, le nombre $\frac{156-7z}{5}$ doit l'être aussi. Ceci ne pouvant plus être révoqué en doute, reprenons présentement un des restes, savoir, $2z-1$, & tâchons de trouver le plus petit nombre, qui étant substitué à la place de z fasse de $\frac{2z-1}{5}$ un nombre entier; & c'est ce qu'il y a moyen de faire précisément, comme dans le dernier problême; mais comme le dénominateur 5 est un très-petit nombre, j'aime mieux tenter la chose par essai (le nombre de ces essais ne pouvant aller qu'à quatre tout au plus,) c'est-à-dire, je fais z égal à 1, 2, 3 & 4 successivement, & j'essaye dans quel de ces cas $\frac{2z-1}{5}$ sera un nombre entier: par ce moyen je trouve, que z étant égal à 3, $\frac{2z-1}{5}=1$.

N. B. Le nombre des essais doit toujours être plus petit d'une unité que le dénominateur.

Puis donc que z est égal à 3, nous aurons y ou $\frac{2z+44}{5}=10$, & x ou $\frac{156-7z}{5}=27$; par conséquent, si vingt & sept perdrix, dix alouettes, & trois cailles ont été achetées, on aura eu quarante oiseaux pour quatre-vingts dix-huit sous, comme l'exigeoit le problême.

Par rapport aux autres solutions, puisque l'équation pour x & z étoit $5x+7z=156$, & que l'équation pour y & z étoit $5y-2z=44$, il s'ensuit de l'Art. 213, que les valeurs successives de z doivent aller en augmentant par une addition continuelle de 5, celles de y par une addition continuelle de 2, & que celles de x doivent aller en diminuant par une soustraction continuelle de 7; ce qui nous donne les solutions suivantes.

x	y	z
27	10	3.
20	12	8.
13	14	13.
6	16	18.

Le

Le nombre des solutions est bornée ici à 4; car si on en vouloit une cinquiéme, la valeur de x se trouveroit être $=-1$, & celle de $z=-2$.

Dans ma solution de ce problême j'ai laissé la valeur de la derniére quantité z indéterminée ; mais j'aurois pu également laisser indéterminée la quantité y, & la solution même auroit été tant soit peu plus aisée : j'y serois parvenu de la même maniére que dans le pénultiéme problême, savoir, en retranchant la seconde équation de six fois la premiére, ce qui m'auroit donné $5y-2z=44$; ainsi $z=\frac{5y}{2}-22$; donc si z est affirmatif, le nombre $\frac{5y}{2}$ doit être plus grand que 22, & $5y$ surpasser 44, & y être plus grand que $8\frac{4}{7}$; par conséquent si z est affirmatif, y doit être plus grand que 8: je soustrais ensuite la seconde équation de huit fois la premiére, & j'ai $2x+7y=124$, & $x=62-\frac{7y}{2}$; donc le nombre $\frac{7y}{2}$ doit être plus petit que 62, & $7y$ moindre que 124, & y plus petit que $7\frac{5}{7}$; donc si x est affirmatif, y doit être plus petit que 18; donc toutes les valeurs de y doivent se trouver entre 8 & 18: mais $7y$ dans l'expression de x, & $\frac{5y}{2}$ dans l'expression de z, font voir que $\frac{y}{2}$ doit être un nombre entier, ou (ce qui revient au même) que y doit être un nombre pair; donc tous les nombres pairs entre 8 & 18 peuvent être mis pour y, savoir, 10, 12, 14, 16: soit $y=10$, & nous aurons x ou $62-\frac{7y}{2}=27$, & z ou $\frac{5y}{2}-22=3$. On peut trouver de cette façon toutes les autres valeurs de x & de z, telles qu'elles sont dans la précédente table.

PROBLEME 12.

217. *Supposons que quelqu'un veuille acheter vingt oiseaux pour vingt sous, savoir, des canards à deux sous piéce, des perdrix à un demi sou piéce, & des oyes à trois sous piéce: combien aura-t-il d'oiseaux de chaque sorte?*

SOLUTION.

Désignez par x, y & z le nombre des canards, des perdrix & des oyes respectivement, & ainsi par $2x$, $\frac{y}{2}$ & $3z$ le prix de chaque sorte exprimé en sous, & vous aurez ces deux équations fondamentales; $x+y+z=20$, & $2x+\frac{y}{2}+3z=20$, ou $4x+y+6z=40$.

1ére. Eq. $x+y+z=20$.
2de. Eq. $4x+y+6z=40$.

Ex-

Exterminez z en retranchant la seconde équation de six fois la premiére, & vous aurez $2x + 5y = 80$, & pour

3éme. Eq. $x = 40 - \frac{5y}{2}$.

Donc la grandeur $\frac{5y}{2}$ doit être plus petite que 40, & $5y$ moindres que 80, & y plus petit que 16. Exterminez ensuite x en retranchant la seconde équation de quatre fois la premiére, & vous aurez $3y - 2z = 40$, & une

4éme. Eq. $z = \frac{3y}{2} - 20$; donc $\frac{3y}{2}$ sont plus grands que 20, & $3y$ plus grands que 40, & y plus grand que 13, & plus petit que 16: mais $\frac{5y}{2}$ dans la troisiéme équation, & $\frac{3y}{2}$ dans la quatriéme, font voir que y doit être un nombre pair; & il n'y a qu'un seul nombre pair entre 13 & 16, savoir 14; donc y est 14, & le problême n'admet qu'une seule solution; par conséquent x ou $40 - \frac{5y}{2}$ doit être 5, & z ou $\frac{3y}{2} - 20$ est 1, c'est-à-dire, qu'il doit y avoir eu cinq canards, quatorze perdrix & une oye.

Bachet, dans son Commentaire sur la quarante & uniéme proposition du quatriéme Livre de *Diophante*, cite l'Epigramme suivante, où ce problême se trouve exprimé.

Ut tot emantur aves, bis denis utere nummis;
Perdix, anser, anas empta vocetur avis:
Sit simplex obolus pretium perdicis, ematur
Sex obolis anser, bisque duobus anas.
Ut tua procedat in lucem quæstio, mentem
Consule; sic loquitur pectoris arca mihi:
Sint anates tres atque duæ, simplex erit anser,
Accipe perdices quatuor atque decem.

PROBLEME 13.

218. *Vingt personnes, consistant en hommes, femmes, & enfans, payent vingt schellings pour un repas, les hommes donnant quatre schellings par tête, les femmes six sous par tête, & les enfans trois sous par tête: combien y avoit il d'hommes, combien de femmes, & combien d'enfans?*

SOLUTION.

Mettez x, y & z pour le nombre des hommes, des femmes & des enfans respectivement, & par consequent $4x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4}$ pour le nombre

des schellings qu'ils ont payé ; & cette derniére condition nous fournira l'équation suivante, $4x + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 20$: multipliez toute l'équation par 4, pour la dégager de ses fractions, & vous aurez $16x + 2y + z = 80$; & les équations seront :

$$1^{re}.\ \text{Eq.}\quad x + y + z = 20.$$
$$2^{de}.\ \text{Eq.}\quad 16x + 2y + z = 80.$$

Exterminez z en retranchant la première équation de la seconde ; & vous aurez $15x + y = 60$; c'est-à-dire pour

$$3^{éme}.\ \text{Eq.}\quad y = 60 - 15x.$$

Il suit de cette équation que $15x$ font plus petits que 60, & par cela même x plus petit que 4. Exterminez y en retranchant deux fois la premiére équation de la seconde, & vous aurez $14x - z = 40$; donc

$$4^{éme}.\ \text{Eq.}\quad z = 14x - 40.$$

Donc $14x$ font plus grands que 40, & x est plus grand que 2 ; donc x doit se trouver entre 2 & 4. Or comme les valeurs de y & de z ont été exprimées dans la troisiéme équation aussi bien que dans la quatriéme sans fractions, il faut que quelque nombre entier qu'on mette pour x, y & z, l'opération donnera des nombres entiers ; mais ils ne seront pas affirmatifs, à moins que x ne soit un nombre entier entre 2 & 4 ; donc x doit être 3, & le problême n'admet qu'une seule solution ; donc y ou $60 - 15x$ sera 15, & z ou $14x - 40$ sera 2 : de-sorte qu'il y avoit 3 hommes, 15 femmes, & 2 enfans.

PROBLEME 14.

219. *Quarante & une personnes, consistant en hommes, femmes & enfans, payent quarante schellings pour un repas, les hommes donnant quatre schellings par tête, les femmes trois schellings par tête, & les enfans quatre sous par tête : combien y avoit-il d'hommes, combien de femmes, & combien d'enfans ?*

SOLUTION.

Mettez x, y & z pour le nombre des hommes, des femmes, & des enfans respectivement, & par conséquent $4x + 3y + \frac{z}{3}$ pour le nombre des schellings qu'ils ont payé, & vous aurez $4x + 3y + \frac{z}{3} = 40$, ou $12x + 9y + z = 120$. Ainsi

$$1^{ére}.\ \text{Eq.}\quad x + y + z = 41.$$
$$2^{de}.\ \text{Eq.}\quad 12x + 9y + z = 120.$$

Re-

Retranchez la seconde équation de douze fois la premiére, & vous aurez $3y + 11z = 372$, & pour

3éme. Eq. $y = 124 - \frac{11z}{3}$.

Donc $\frac{11z}{3}$ sont plus petits que 124, & $11z$ plus petits que 372, & z plus petit que 34. Retranchez neuf fois la premiére équation de la seconde, & vous aurez $3x - 8z = -249$; & pour

4éme. Eq. $x = \frac{8z}{3} - 83$.

Par conséquent $\frac{8z}{3}$ doivent être plus grands que 83, & $8z$ plus grands que 249, & z plus grand que 31. Il suit de-là, comme aussi de la troisiéme équation & de la quatriéme, que si x & y sont des nombres entiers & affirmatifs, z doit être quelque multiple de 3 situé entre 31 & 34; mais il n'y a qu'un seul multiple pareil, qui est 33; donc le problême n'admet qu'une solution, & $z = 33$; donc x ou $\frac{8z}{3} - 83 = 5$, & y ou $124 - \frac{11z}{3} = 3$; de-sorte qu'il y avoit 5 hommes, 3 femmes, & 33 enfans.

PROBLEME 15.

220. *On demande de partager trente en trois nombres entiers* x, y *&* z, *qui soient tels, que* $2x + 9y + 15z$ *fassent quatre cens & dix-neuf.*

SOLUTION.

1ére. Eq. $x + y + z = 30$.
2de. Eq. $2x + 9y + 15z = 419$.

Retranchez deux fois la premiére équation de la seconde, & vous aurez $7y + 13z = 359$; & pour

3éme. Eq. $y = \frac{359 - 13z}{7}$.

Donc z doit être plus petit que 28, ou (ce qui revient au même) z ne sauroit être quelque nombre entier plus grand que 27. Retranchez la seconde équation de neuf fois la premiére, & vous aurez $7x - 6z = -149$. Ce qui nous donne une

4éme. Eq. $x = \frac{6z - 149}{7}$.

Donc z ne sauroit être un nombre entier au-dessous de 25. Il est clair par la troisiéme équation & par la quatriéme, que $\frac{359 - 13z}{7}$ & $\frac{6z - 149}{7}$ doivent être l'un & l'autre des nombres entiers: chose dont la possibilité peut

peut ſe démontrer par la même méthode que nous avons ſuivie dans le dixiéme problême & dans l'onziéme: mais pour varier je m'y prendrai à-préſent d'une autre façon, & argumenterai ainſi: $\frac{359-13z}{7}$ & $\frac{6z-149}{7}$ étant ajoûtés enſemble font $\frac{210-7z}{7}$, qu'on peut réduire à un nombre entier; donc ſi $\frac{6z-149}{7}$ eſt un nombre entier, l'autre $\frac{359-13z}{7}$ doit être tel auſſi; car ſans cela leur ſomme ne pourroit pas former un nombre entier. Pour déterminer la valeur de z; je dis, toute valeur de z qui ſera de $\frac{6z-149}{7}$ un nombre entier, le fera pareillement de $\frac{6z-2}{7}$, parce que $6z-149$ étant diviſés par 7, il reſte $6z-2$; mais 5 eſt un nombre qui étant ſubſtitué à la place de z fait de $\frac{6z-2}{7}$ un nombre entier; donc ſi l'on ſuppoſe $z=5$, x & y feront des nombres entiers, mais pas tous deux affirmatifs; car pour qu'ils fuſſent tous deux affirmatifs, il faudroit que z ne fût pas un nombre entier au-deſſous de 25 ou au-deſſus de 27: cependant ayant trouvé la plus petite valeur de z, qui rend x & y des nombres entiers, ſavoir 5; & remarquant, tant par l'une que par l'autre des équations $7x-6z=-149$, & $7y+13z=359$, que toutes les autres valeurs de z doivent être déterminées à l'aide d'une addition continuelle du nombre 7, je commence une progreſſion depuis 5, & je la continue par une addition réitérée du nombre 7, juſqu'à ce que j'arrive à un terme ſitué entre les deux limites de z, (ce qui eſt toujours poſſible quand le problême l'eſt). J'aurai donc 5, 12, 19, 26: or comme ce dernier nombre ſe trouve entre les deux limites de z, ſavoir 24 & 28, j'en infére que ſi je fais z égal à 26, x & y feront l'un & l'autre des nombres entiers & affirmatifs; donc $z=26$, x ou $\frac{6z-149}{7}=1$, & y ou $\frac{359-13z}{7}=3$: ainſi les nombres cherchés ſont 1, 3 & 26, & ſatisferont auſſi aux conditions du problême, qui n'admet que cette unique ſolution.

x	y	z.
−17	42	5.
−11	29	12.
− 5	16	19.
1	3	26.
7	−10	33.

PRO-

PROBLEME 16.

Qui est un problême général.

221. *Trouver, s'il est possible, trois nombres, tous entiers & affirmatifs, dont la somme est non seulement donnée, mais aussi la somme de leurs produits, après qu'ils auront été multipliés séparément par trois multiplicateurs donnés.*

SOLUTION.

Soient x, y & z les trois nombres cherchés, & que x désigne le nombre qui a le plus grand multiplicateur, & z celui qui a le plus petit multiplicateur, ou un multiplicateur négatif si quelqu'un d'eux est tel, ou s'il y a deux multiplicateurs négatifs, que z désigne le nombre qui a le plus grand multiplicateur négatif; après quoi désignant par y le terme moyen, vous aurez deux équations, une dont le terme absolu est la somme donnée des trois nombres cherchés, & une autre dont le terme absolu est la somme donnée des produits. Voici comment vous pourrez exterminer z par le secours de ces deux équations: multipliez la premiére équation par le coëfficient de z dans la seconde, & puis retranchant ce produit de la seconde équation, vous formerez une troisiéme équation, qui sera $Ax + By = C$: divisez cette équation entiére par la plus grande mesure commune de A & de B, & qu'il en résulte $ax + by = c$; cela étant, je déduirai de cette équation, & de la maniére dont elle a été formée, les observations suivantes.

1°. Si les opérations, telles que nous les avons indiquées, ont été bien faites, les nombres a & b seront toujours entiers, affirmatifs, & premiers l'un à l'autre, & a toujours plus grand que b.

2°. Si les nombres x & y sont entiers & affirmatifs, le nombre $\overline{ax + by}$ ou c sera nécessairement tel aussi; quoique la proposition inverse ne soit pas vraie pour cela, savoir, que si c est un nombre entier & affirmatif, x & y le soient aussi.

3°. Si une des valeurs de y est connue, les valeurs correspondantes de x & de z le seront facilement, en faisant $x = \frac{c - by}{a}$ & $z = s - x - y$, mettant s pour la somme donnée des trois nombres cherchés: d'où il suit, que si x & y sont des nombres entiers, z doit nécessairement l'être aussi.

4°. Si la plus petite valeur de y est connue, & que le problême soit susceptible de plus d'une solution, nous pourrons avoir autant d'autres valeurs successives de y qu'il sera nécessaire, par une addition continuelle du nombre a; ainsi les valeurs correspondantes de x formeront une pro-

progreſſion arithmétique décroiſſante, dont la différence commune eſt $\overline{a-b}$. Les deux premiéres parties de cette aſſertion ſont prouvées par l'Art. 213, & voici comment je démontre la derniére: ſi les valeurs de y croiſſent de la quantité a, & que celles de x décroiſſent de la quantité b, les différentes valeurs de la ſomme $\overline{x+y}$, conſidérée comme un ſeul nombre, croîtront de la quantité $\overline{a-b}$; mais comme la ſomme $\overline{x+y}$ va en croiſſant, la troiſiéme quantité z doit aller en décroiſſant, à cauſe que dans le problême la ſomme totale $\overline{x+y+z}$ eſt toujours la même; donc les valeurs ſucceſſives de z formeront une progreſſion arithmétique décroiſſante, dont la différence commune ſera $\overline{a-b}$.

5°. Il ſuit de cette derniére obſervation, que l'accroiſſement de y eſt le décroiſſement de x & de z, & réciproquement, de-ſorte que quand y eſt le plus petit en ſon genre pour réſoudre le problême, x & z ſont les plus grands dans le leur; & ſi alors ils ſont tous deux affirmatifs, le problême ſera réſolu; mais ſi l'un des deux eſt négatif, ou qu'ils ſoient tels tous deux, le problême ſera impoſſible.

Tâchons préſentement de trouver deux nombres entiers tels, qu'étant ſubſtitués à la place de x & de y, ils faſſent $ax+by=c$; ce qui peut s'effectuer de la maniére ſuivante: des quotiens d'une diviſion continuelle de a & de b, formez une ſuite d'équations ſuivant l'Art. 175; & comme les nombres primitifs a & b ſont premiers l'un à l'autre, le terme abſolu des deux derniéres équations ſera ± 1; prenez l'équation où il y aura -1, c'eſt-à-dire, prenez la derniére équation qui occupe un endroit pair, & elle ſera $ae-bd=-1$; changez les ſignes, & vous aurez $-ae+bd=+1$; multipliez les deux membres de l'équation par c, & vous aurez $-ace+bcd=c$: faites $-ce=x$ & $+cd=y$, & vous aurez deux nombres entiers x & y, dont la propriété ſera telle, que $ax+by$ ſera égal à c: mais comme la grandeur x eſt ici négative, il faut eſſayer d'en faire (s'il eſt poſſible) une quantité affirmative, en abaiſſant la valeur de y autant qu'il ſe pourra, c'eſt-à-dire, en retranchant le nombre a de cd auſſi ſouvent qu'il y aura moyen de le faire; c'eſt-à-dire, en diviſant cd par a; car en ce cas, le reſte, s'il y en a, ou le diviſeur a, s'il n'y a point de reſte, exprimera la plus petite valeur de y; & ſi par ce moyen les quantités x & z ſe trouvent affirmatives, le problême ſera ſuſceptible d'une ou de pluſieurs ſolutions en nombres affirmatifs; mais ſi la grandeur x reſte toujours négative, ou s'il ſe trouve que le nombre z ſoit négatif, il n'y aura pas moyen d'élever ces valeurs négatives ſans abaiſſer la valeur de y, qui eſt déja auſſi baſſe qu'il eſt

eſt poſſible, & par conſéquent en ce cas le problême ne ſauroit avoir aucune ſolution affirmative.

Pour ce qui eſt du nombre d, puiſqu'il eſt le coëfficient de b dans la derniére équation qui occupe un endroit pair, & que ce coëfficient & les autres ſont les termes d'une ſérie commencée depuis 0 & 1, & continuée par les quotiens d'une diviſion continuelle de a & de b, il eſt évident que ſi une pareille diviſion ſe fait actuellement, & que le nombre des quotiens ſoit pair, la derniére donnera une unité, par la raiſon indiquée dans l'Art. 175; mais ſi le nombre des quotiens eſt impair, le dernier doit être rejetté, comme menant à une fauſſe équation; & ſi à l'aide du reſte des quotiens on calcule alors une ſérie depuis 0 & 1, le dernier terme de la ſérie ſera d; donc dans la pratique le nombre d peut être calculé au moyen de cette ſérie ſeulement, ſans ſe mettre en peine des autres parties des équations où ces termes ſe trouvent mêlês.

Exemple I.

Que les équations ſoient,

$$1°.\quad x+y+z=s.$$
$$2°.\quad 10x+5y+2z=r.$$

Si l'on retranche deux fois la premiére équation de la ſeconde, on aura $8x+3y=r-2s$; & comme 8 & 3 ſont des nombres premiers l'un à l'autre, l'équation ne ſauroit être réduite à de plus ſimples termes; c'eſt pourquoi $a=8$, $b=3$, $c=r-2s$, & $d=3$; car les quotiens d'une diviſion continuelle depuis 8 & 3 ſeront 2, 1, 2. Ces quotiens étant en nombre impair, le dernier doit être rejetté, & il faut avec les quotiens qui reſtent, ſavoir 2 & 1, former la ſérie 0, 1, 2, 3, ce qui donnera $d=3$, & $cd=3c$; par ce moyen on pourra adapter aux multiplicateurs 10, 5 & 2 la règle ſuivante: faites $r-2s=c$; diviſez $3c$ par 8, & le reſte ſera y; ainſi $x=\frac{c-3y}{8}$, & $z=s-x-y$. Par exemple, ſoit $s=20$ & $r=53$, c'eſt-à-dire, qu'il ſoit queſtion de partager le nombre 20 en trois parties telles, que dix fois la premiére partie, cinq fois la ſeconde, & deux fois la troiſiéme, faſſent enſemble 53: ici $r-2s$ ou $c=13$, & $3c=39$, lequel nombre étant diviſé par 8 laiſſe pour reſte 7; donc en ce cas $y=7$, $\frac{13-3y}{8}$ ou $x=-1$, & $s-x-y$ ou $z=14$: de-ſorte que les nombres cherchés ſont $-1, +7$ & $+14$; donc ce problême ne peut être réſolu en nombres affirmatifs, mais bien en d'autres; car -1 multiplié par $+10$, $+7\times5$, $+14\times2$, c'eſt-à-dire, $-10+35+28=53$.

De

De plus, ſuppoſant que les multiplicateurs 10, 5, & 2 reſtent, & que s eſt toujours $=20$, que r ſoit $=170$, & vous aurez $c=67$, $3c=201$, $y=1$, $x=8$, & $z=11$: ſi bien que les nombres, qui réſolvent le problême, ſont $8\times10+1\times5+11\times2$, c'eſt-à-dire, $80+5+22=107$; mais ce problême admet encore deux ſolutions affirmatives, qui ſuivant la quatriéme obſervation ſont 5, 9 & 6; 2, 17 & 1.

EXEMPLE 2.

On demande de partager le nombre donné s en trois parties de telle ſorte, que trois fois une des parties, un tiers de la ſeconde, & un cinquiéme de la derniére forment de-nouveau le nombre s.

Ici les équations ſont $x+y+z=s$, & $3x+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=s$; mais pour faciliter l'uſage de cette derniére équation, je la dégage de ſes fractions, en multipliant par 15 tous les termes qui la compoſent, ce qui produit $45x+5y+3z=15s$. Nous avons donc deux équations fondamentales,

$$1^\circ.\quad x+y+z=s.$$
$$2^\circ.\quad 45x+5y+3z=15s.$$

Retranchez trois fois la premiére équation de la ſeconde, & vous aurez $42x+2y=12s$; diviſez toute l'équation par 2, à cauſe que 2 eſt la plus grande meſure commune de 42 & de 2, & vous aurez $21x+1y=6s$. Ici donc $a=21$, $b=1$, $c=6s$, & $d=1$; car l'unique quotient de a diviſé par b, ayant été rejetté à cauſe qu'il eſt ſeul, il ne reſtera aucun quotient pour continuer la ſérie depuis 0 & 1; donc en ce cas 1 dernier terme de la ſérie doit être pris pour d; par conſéquent le dividende cd ſera $6s$, & nous aurons la règle ſuivante particuliérement adaptée à ce problême: diviſez $6s$ par 21, & le reſte ſera y; donc $x=\frac{6s-y}{21}$, & $z=s-x-y$. Comme par exemple, on demande de partager 100 en trois parties telles, que trois fois la premiére partie, *un tiers de la ſeconde*, & un cinquiéme de la troiſiéme faſſent enſemble le même nombre de 100: ici $6s=600$, qui étant diviſés par 21 laiſſent 12 pour y; donc $x=28$ & $z=60$: de-ſorte que les nombres 28, 12 & 60 réſoudront le problême; car $28\times3+\frac{12}{3}+\frac{60}{5}$, c'eſt-à-dire, $84+4+12=100$. La quatriéme obſervation fournit auſſi deux autres ſolutions affirmatives de ce problême, ſavoir, 27, 33, 40, & 26, 54, 20; & c'eſt-là tout; car une autre opération réduiroit z à rien.

EXEMPLE 3.

Que la ſomme des produits ſoit toujours égale à la ſomme des nombres, & qu'il y ait pour multiplicateurs 3, 1 & $-\frac{1}{3}$, c'eſt-à-dire, ſoient $3x+y$ —

$-\frac{z}{3}=s$, ou $9x+3y-z=3s$, & les équations feront présentement.

1ére. $x+\ y+z=\ s$.
2de. $9x+3y-z=3s$.

Multipliez la premiére équation par -1, & puis retranchez-la de la feconde, ou (ce qui revient au même) ajoûtez la premiére équation à la feconde, & vous aurez $10x+4y=4s$; divifez le tout par 2 (la plus grande mefure commune de 4 & de 10) & vous aurez $5x+2y=2s$; donç en ce cas $a=5$, $b=2$, & $c=2s$. Or les quotiens d'une divifion continuelle depuis 5 & 2 font 2 & 2; défignez-les par 2 & 1, & fervez-vous en pour calculer la férie 0, 1, 2, 3, vous aurez $d=3$, & la règle pour les multiplicateurs 3, 1 & $-\frac{1}{3}$, quand la fomme des produits doit être égale à la fomme des nombres, fera telle : divifez $6s$ par 5, & le refte fera y; puis faites $\frac{2s-2y}{5}=x$, & $s-x-y=z$. Comme par exemple, foit $s=20$; alors $6s=120$, lesquels étant divifés par 5, il y aura pour refte rien ou 5; c'eft pourquoi en ce cas $y=5$, $x=6$, & $z=9$, & les nombres rangés en ordre font 6, 5 & 9. Ces nombres fatisfont aux conditions du problême; car premiérement $6+5+9=20$, & en fecond lieu $18+5-3=20$. Mais en conféquence de la quatriéme obfervation, ce problême admet encore deux autres folutions, qui font 4, 10 & 6; & 2, 15 & 3.

N. B. 1°. Dans la règle, qui vient d'être énoncée, nous avons fuppofé que y étoit le refte de $6s$ divifés par 5; mais nous aurions pu négliger $5s$, & avoir fait de y le refte de $1s$ divifé par 5; & la même réduction peut fe faire dans tous les autres cas où le coëfficient de s eft plus grand que le divifeur.

2°. Les problêmes 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, & une infinité d'autres du même genre, ne font que des cas particuliers de ce problême; mais fi l'on veut leur appliquer cette folution par maniére d'exemples, il faut avoir foin de les défigner conformément aux directions données au commencement de cette folution.

Du Quarré Magique.

PROBLEME 17.

222. *Qu'il y ait quelque quarré impair tel que 49, dont la racine quarrée eft 7; & que quelque figure quarrée foit divifée en 49 petits quarrés, favoir en 7 rangs de cellules, & chaque rang en 7 cellules: On demande de diftribuer dans ces cellules tous les nombres naturels depuis 1 jufqu'à 49 inclufivement, de-forte*

que la somme de tous les nombres dans chaque rang, soit qu'on les prenne horizontalement, perpendiculairement, ou en diagonale, soit la même. Toute figure construite de cette façon s'appelle communément un quarré magique.

SOLUTION.

Comme 7 est le côté du quarré proposé, que les sept premiers nombres, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 soient désignés par les sept premiéres lettres de l'Alphabet *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* respectivement, & que ces lettres soient répétées sept fois dans le même ordre, en sept rangs distincts, placés exactement l'un au-dessous de l'autre; & qu'il n'y ait d'autre différence entre les rangs que celle-ci, savoir, que chaque rang inférieur commence par le second terme de celui qui est immédiatement au-dessus: ainsi le premier rang sera *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*; le second *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*; le troisiéme *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *b*; &c. Le quarré construit de cette façon porte le nom de primitif, à cause qu'on en dérive la construction du quarré magique, que nous allons considérer à-présent.

Figure 1.

a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
c	d	e	f	g	a	b
d	e	f	g	a	b	c
e	f	g	a	b	c	d
f	g	a	b	c	d	e
g	a	b	c	d	e	f

Qu'on fasse donc un autre quarré divisé en 49 cellules, comme dans la seconde figure, que j'appellerai quarré magique par voye d'anticipation, & que les cellules en soient remplies par le moyen du quarré primitif, de la maniére suivante.

Figure 2.

$\overline{7d+d}$	$\overline{7e+e}$	$\overline{7f+f}$	$\overline{7g+g}-49$	$\overline{7a+a}$	$\overline{7b+b}$	$\overline{7c+c}$
$\overline{7e+c}$	$\overline{7f+d}$	$\overline{7g+e}-49$	$\overline{7a+f}$	$\overline{7b+g}$	$\overline{7c+a}$	$\overline{7d+b}$
$\overline{7f+b}$	$\overline{7g+c}-49$	$\overline{7a+d}$	$\overline{7b+e}$	$\overline{7c+f}$	$\overline{7d+g}$	$\overline{7e+a}$
$\overline{7g+a}-49$	$\overline{7a+b}$	$\overline{7b+c}$	$\overline{7c+d}$	$\overline{7d+e}$	$\overline{7e+f}$	$\overline{7f+g}$
$\overline{7a+g}$	$\overline{7b+a}$	$\overline{7c+b}$	$\overline{7d+c}$	$\overline{7e+d}$	$\overline{7f+e}$	$\overline{7g+f}-49$
$\overline{7b+f}$	$\overline{7c+g}$	$\overline{7d+a}$	$\overline{7e+b}$	$\overline{7f+c}$	$\overline{7g+d}-45$	$\overline{7a+e}$
$\overline{7c+e}$	$\overline{7d+f}$	$\overline{7e+g}$	$\overline{7f+a}$	$\overline{7g+b}-49$	$\overline{7a+c}$	$\overline{7b+d}$

Premiérement, commençant par le premier rang horizontal du quarré primitif, que tous les nombres de ce rang soient multipliés successivement par 7 côté du quarré proposé, en allant de la gauche à la droite; & aux différens produits de cette multiplication ajoûtez de suite les nombres du septiéme & plus bas rang horizontal; & vous aurez les nombres $\overline{7a+g}$, $\overline{7b+a}$, $\overline{7c+b}$, $\overline{7d+c}$, $\overline{7e+d}$, $\overline{7f+e}$, $\overline{7g+f}-49$; lesquels nombres doivent être placés dans le rang horizontal immédiatement au-dessous de celui du milieu en allant de la gauche à la droite: mais ici (comme on peut le voir dans la figure) il faut retrancher 49 de tout nom-

bre

bre plus grand que 49; car si l'on admettoit quelque nombre plus grand que 49 dans ce quarré, quelque nombre plus petit que 49 manqueroit de place, ce que la nature du problême ne permet pas.

2°. Ayant rempli ce rang du quarré magique, que votre multiplication descende, & que votre addition monte dans le quarré primitif, de-sorte que le rang qui doit être multiplié, & celui où l'addition doit se faire, puissent toujours être également éloignés du rang du milieu, c'est-à-dire, multipliez tous les nombres dans le second rang du quarré primitif par 7, & ajoûtez à chaque produit un nombre correspondant dans le sixiéme rang, & vous aurez les nombres $\overline{7b+f}$, $\overline{7c+g}$, $\overline{7d+a}$ &c., pour remplir le sixiéme rang du quarré magique.

3°. De-même, sept fois le troisiéme rang réuni avec le cinquiéme, donnera le septiéme rang du quarré magique.

4°. Nous voici parvenus au rang du milieu du quarré primitif, dans lequel le rang à multiplier & le rang à ajoûter se rencontrent; c'est pourquoi ce rang, sans le sécours d'aucun autre, fournira des nombres pour le premier rang du quarré magique, savoir, $\overline{7d+d}$, $\overline{7e+e}$, $\overline{7f+f}$, &c.

Figure 1.

a	b	c	d	e	f	g
b	c	d	e	f	g	a
c	d	e	f	g	a	b
d	e	f	g	a	b	c
e	f	g	a	b	c	d
f	g	a	b	c	d	e
g	a	b	c	d	e	f

5°. Pareillement, sept fois le cinquiéme rang du quarré primitif avec le troisiéme, sept fois le sixiéme avec le second, & sept fois le septiéme avec le premier, fourniront des nombres pour le second, pour le troisiéme, & pour le quatriéme des rangs horizontaux du quarré magique. Et par ce moyen toute la figure sera fournie, au-moins en lettres: ainsi il ne me reste qu'à démontrer que cette figure a toutes les propriétes d'un quarré magique.

Figure 2.

$7d+d$	$7e+e$	$7f+f$	$7g+g-49$	$7a+a$	$7b+b$	$7c+c$
$7e+c$	$7f+d$	$7g+e-49$	$7a+f$	$7b+g$	$7c+a$	$7d+b$
$7f+b$	$7g+c-49$	$7a+d$	$7b+e$	$7c+f$	$7d+g$	$7e+a$
$7g+a-49$	$7a+b$	$7b+c$	$7c+d$	$7d+e$	$7e+f$	$7f+g$
$7a+g$	$7b+a$	$7c+b$	$7d+c$	$7e+d$	$7f+e$	$7g+f-49$
$7b+f$	$7c+g$	$7d+a$	$7e+b$	$7f+c$	$7g+d-49$	$7a+e$
$7c+e$	$7d+f$	$7e+g$	$7f+a$	$7g+b-49$	$7a+c$	$7b+d$

Démontrons premiérement, qu'elle contient tous les nombre naturels depuis 1 jusqu'à 49 inclusivement: car quiconque suivra le nombre $7g$

 dans

dans tous les rangs horizontaux, trouvera la grandeur $\overline{7g-49}$ combinée avec toutes les lettres a, b, c, d, e, f, g, quoique dans un ordre différent de celui où ces lettres sont placées ici. Les grandeurs a, b, c, d, &c. désignent, comme il a été dit, tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 7 inclusivement: celui qui suivra de-même $7a$, trouvera, après avoir mis ces grandeurs en ordre, les nombres $\overline{7a+a}$, $\overline{7a+b}$, $\overline{7a+c}$, $\overline{7a+d}$, $\overline{7a+e}$, $\overline{7a+f}$, $\overline{7a+g}$, série qui contient tous les nombres depuis 8 jusqu'à 14: il trouvera de-même tous les termes de la série $\overline{7b+a}$, $\overline{7b+b}$, $\overline{7b+c}$, $\overline{7b+d}$, $\overline{7b+e}$, $\overline{7b+f}$, $\overline{7b+g}$, qui comprend tous les nombres depuis 15 jusqu'à 21, & ainsi de suite jusqu'à $\overline{7f+g}=49$. De plus, il est manifeste que la somme de tous les rangs horizontaux & perpendiculaires sera la même: car quiconque examinera ces rangs avec tant soit peu d'attention, ne pourra que s'appercevoir, que les mêmes lettres sont multipliées & ajoûtées dans chacun des mêmes rangs, l'ordre dans lequel elles sont rangées formant la seule différence; de-sorte que toutes les sommes doivent être la même. Considérons enfin les deux rangs qui forment les diagonales: en examinant celle qui descend de la gauche à la droite, depuis $\overline{7d+d}$ jusqu'à $\overline{7b+d}$, nous trouverons que les nombres de cette diagonale sont $\overline{7d+d}$, $\overline{7f+d}$, $\overline{7a+d}$, $\overline{7c+d}$, $\overline{7e+d}$, $\overline{7g+d-49}$, $\overline{7b+d}$; mais $\overline{7d+7f+7a+7c+7e+7g+7b}$ $=\overline{7a+7b+7c+7d+7e+7f+g}$; donc la somme du premier rang en diagonale sera la même que la somme de ces nombres $\overline{7a+d}$, $\overline{7b+d}$, $\overline{7c+d}$, $\overline{7d+d}$, $\overline{7e+d}$, $\overline{7f+d}$, $\overline{7g+d-49}$; mais d est le terme moyen de la progression a, b, c, d, e, f, g, & par conséquent la somme de cette progression est la même que si tous les termes en étoient des d, c'est-à-dire, la somme de cette progression sera $7d$; si donc au-lieu d'ajoûter sept fois d, comme ci-dessus, nous ajoûtons les termes de la progression $a, b, c, d, e. f, g$, ce qui ne produit aucun changement dans la somme totale, nous aurons la somme du premier rang en diagonale équivalente à la somme des nombres $\overline{7a+a}$, $\overline{7b+b}$, $\overline{7c+c}$, $\overline{7d+d}$, $\overline{7e+e}$, $\overline{7f+f}$, $\overline{7g+g-49}$, qui est la même que la somme du premier rang horizontal, & par conséquent de chacun des autres rangs: dans l'autre rang en diagonale qui monte de la gauche à la droite, depuis $\overline{7c+e}$ jusqu'à $\overline{7c+c}$, nous trouvons le nombre $7c$ répété sept fois, & uni séparément à toutes les lettres a, b, c, d, e, f, g, quoique dans un autre ordre; mais $c=d-1$; donc $7c=7d-7=\overline{a+b+c+d+e+f+g-7}$; ainsi $7c$ répé-

répétés ſept fois ſont égaux à $7a + 7b + 7c + 7d + 7e + 7f + 7g - 49$; donc la ſomme de ce rang en diagonale ſera la même que ſi l'ordre & la valeur de ces termes étoient $7a + a$, $7b + b$, $7c + c$, $7d + d$, $7e + e$, $7f + f$, $7g + g - 49$, c'eſt-à-dire, la ſomme de ce rang en diagonale ſera la même que celle de tout le reſte. *C. Q. F. D.*

Juſqu'ici nous avons rempli notre quarré magique de lettres, afin d'en faire mieux concevoir la nature & la conſtruction; mais ſi nous voulions remplir notre quarré de nombres, comme le problême le demande, nous devrions commencer par faire un quarré primitif en nombres, comme dans la fig. 3. où le rang ſupérieur eſt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; le ſecond 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1; le troiſiéme 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, &c.; & ſi par le ſecours de ce quarré nous conſtruiſons un quarré magique ſuivant les directions indiquées ci-deſſus, nous aurons dans la quatriéme figure un quarré tel que le problême l'exige.

Figure 3.

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

Figure 4.

32	40	48	7	*8	16	24
38	46	5	13	21	*22	30
44	3	11	19	27	35	*36
*1	9	17	25	33	41	49
14	*15	23	31	39	47	6
20	28	*29	37	45	4	12
26	34	42	*43	2	10	18
				8		

Quiconque examinera attentivement la conſtruction de ce quarré magique, & la diſpoſition des nombres qui le compoſent, pourra aiſément en déduire les conſéquences ſuivantes.

1°. Quel que ſoit le côté du quarré, l'unité ſe trouvera toujours dans la premiére cellule du rang horizontal du milieu à la gauche: car $7g + a - 49 = 1$; & ſi nous prenons 7 ou g pour le côté du quarré, & que nous faſſions ce nombre $= r$, cette cellule ſe trouvera toujours remplie par $rr + a - rr = 1$.

2°. Si les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 dans le quarré primitif avoient été continués à l'infini, les nombres dans chaque rang horizontal du quarré magique, excepté celui où 49 eſt précédé d'un ſigne négatif, auroient été en croiſſant de la gauche à la droite en une progreſſion arithmétique, dont la différence commune ſeroit 8 $(r + 1)$: car dans le premier rang, par exemple, (& la même raiſon a lieu par rapport à tout le reſte,) les produits $7d$, $7e$, $7f$, $7g$, &c. forment une progreſſion arithmétique croiſſante dont la différence commune eſt 7; & les parties à ajoûter, ſavoir, d, e,

d, *e*, *f*, *g*, &c. forment une autre progreſſion arithmétique croiſſante dont la différence eſt 1; donc les deux progreſſions ajoûtées enſemble, ſavoir; $7d+d$, $7e+e$, $7f+f$, $7g+g$ &c. formeront une progreſſion dont la différence commune ſera 8.

3°. Mais comme les nombres dans le quarré primitif ne ſont continués que juſqu'au nombre de 7 incluſivement, qui eſt ſuivi après cela par 1, c'eſt-à-dire, par la lettre *a*, cela produit un terme irrégulier par-tout où le nombre *a* eſt ajoûté: j'appelle ce terme irrégulier, à cauſe qu'il ne ſurpaſſe le terme qui le précédé immédiatement que d'une unité, au-lieu que ſuivant la loi de cette progreſſion il devroit le ſurpaſſer de 8. Il y aura dans chaque rang horizontal un ſeul de ces termes irréguliers, qui ſont tous marqués dans la quatriéme figure, en commençant par l'unité dans l'ordre ſuivant, 1, 15, 29, 43, 8, 22, 36, & forment une progreſſion arithmétique dont la différence commune eſt 14 ($2r$).

4°. De ce qui vient d'être dit dans les trois corollaires précédens, & particuliérement de la conſidération des endroits qu'occupent les termes irréguliers, dont nous venons de donner la ſuite, on peut déduire une nouvelle méthode de conſtruire un quarré magique avec bien plus de facilité, puiſqu'on peut s'y paſſer d'un quarré primitif. Voici en quoi conſiſte cette méthode: Formez une progreſſion arithmétique qui commence par l'unité, dont la différence commune ſoit $2r$, & le nombre des termes *r*. Placez le premier terme de cette progreſſion, qui, dans le cas préſent, ſera 1, 15, 29, 43, 8, 22, 36, dans la premiére cellule du rang horizontal du milieu, à la gauche du quarré magique dont on veut tenter la conſtruction; puis deſcendant de-là en diagonale vers la droite, rempliſſez les cellules que vous traverſerez d'autant d'autres termes de la progreſſion précédente que vous pourrez: ces termes dans le cas préſent ſont 15, 29, 43; ſi ce mouvement par la diagonale étoit continué, le terme ſuivant 8 tomberoit hors du quarré au deſſous du cinquiéme rang perpendiculaire à compter de la gauche: ainſi placez ce terme dans la cellule ſupérieure de ce cinquiéme rang perpendiculaire, & puis deſcendant de nouveau par la diagonale vers la droite, vous trouverez place pour les deux termes qui reſtent encore, ſavoir, 22 & 36. Ayant ainſi aſſigné leurs cellules aux termes irréguliers, toutes les autres cellules ſeront aiſément remplies: ſuppoſons que je veuille remplir le premier rang horizontal, je vois quel en eſt le terme irrégulier, ſavoir 8: je commence par ce terme 8 une progreſſion arithmétique, dont la différence commune eſt 8, & avançant dans ce rang vers la droite, j'inſére autant d'autres termes de cette progreſſion que je puis, leſquels termes dans le cas préſent ſont 16 & 24; puis obſervant que je ne ſaurois aller plus loin, je conti-

nue

nue le reste de la progression en commençant à l'autre bout du même rang horizontal, écrivant, de la gauche à la droite, les nombres 32, 40, 48 & 7; par-là le premier rang sera rempli, & les autres rangs pourront l'être en suivant la même méthode.

5°. Puisque dans un quarré magique, la somme de chaque rang est la même, si quelqu'un avoit la curiosité de connoître cette somme, sans construire la figure, il pourroit raisonner ainsi: que le nombre 7 soit le côté du quarré; cela étant il est clair que dans ce quarré seront contenus tous les nombres naturels depuis 1 jusqu'à 49 inclusivement, lesquels dans leur ordre naturel forment une progression arithmétique, dont le plus petit terme est 1 & le plus grand 49, & le nombre des termes 49; ajoûtez ensemble le plus grand terme & le plus petit, & la somme sera 50, dont la moitié est 25; donc 25 est une moyenne arithmétique entre les extrêmes 1 & 49; & le nombre 49 fois 25 sera la somme de toute la progression par l'Art. 124; par conséquent la somme de tous les nombres dans le quarré entier, ou la somme des nombres dans tous les sept rangs horizontaux, ou dans tous les sept rangs perpendiculaires, est 49 fois 25; donc la somme des nombres dans quelqu'un des rangs est 7 fois 25, ou 175; & le même raisonnement est applicable à tout autre cas, si le côté du quarré est un nombre impair. La somme de tous les nombres dans un rang quelconque est $\frac{r^2+1}{2} \times r$; d'où j'infére, que si $\frac{r^2+1}{2}$ est fait égal à m, c'est-à-dire, si m est une moyenne arithmétique entre les extrêmes 1 & r^2, la somme de chaque rang sera la même que si les cellules en étoient toutes remplies du même nombre m.

Il y a plusieurs autres méthodes de construire des quarrés magiques, tant impairs que pairs, & bien d'autres propriétés surprenantes rélatives à ces quarrés, que je passerai toutes sous silence, à cause que cette matiére, quoique curieuse & agréable en elle-même, n'est pourtant après tout d'aucun usage dans les autres parties des Mathématiques. Ceux qui souhaiteront d'en savoir davantage sur les quarrés magiques, pourront consulter les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour les années 1705 & 1710, où ils trouveront ce sujet presque épuisé par les savans & célébres Mathématiciens *De la Hire* & *Sauveur*.

FIN DU TOME PREMIER.

